

熊本大学工学部	正員	三池 亮次
大成建設	正員	松本 弘一
大林組	正員	橋 勝美
熊本大学工学部	学生員	○村上 司

1. はじめに、骨組構造解析のように数式による現象表示が容易であるが、形状因子が複雑に関与する場合には、パイ定理による次元解析よりは、運動方程式そのものの無次元化によって、より適正な無次元積を誘導することができる。すなわち、立体骨組構造の弾性基礎式をマトリックス表示し、その力学的性状を支配する無次元積を静的の場合について誘導し、2, 3の興味ある問題を提起したがここでは同様の手法を動的の場合に拡張し、骨組構造の振動現象を規定する無次元積と相似律と、剛節トラスの二次応力の問題について検討を加えた。

剛節トラスの二次応力については、部材の横断面内の高さ A と部材長 l の比 A/l に比例することが、すでに定説となっており、各国の橋梁示方書に取り入れられているが、筆者らは、さらに、立体骨組構造解析の基礎式の無次元化を試み、骨組構造の力学的性状を支配する要因は、 A/l よりむしろ細長比であることを指摘した。また、変位、断面力、応力など変形の無次元積を、細長比など、形状無次元積の関数として表示する変形法基礎式の誘導を試み、とくに、矩形断面を用いた剛節トラス部材の細長比その他の形状パラメーターが、変位、断面力および応力の無次元積に及ぼす効果について検討した。ここでは各種の部材断面形状を有するトラス二次応力を決定する主要因として、無次元断面係数 C_F を誘導するとともに、矩形以外の断面をもつトラス部材の細長比その他の形状パラメーターが、変位、断面力、応力の無次元積に及ぼす効果を検討したものである。

2. 骨組構造の運動方程式の無次元表示

(a). 我々強制振動の場合 変位を d とし、速度 \dot{d} に比例する減衰力 C が存在し、外力が

$$f(t) = P e^{i\omega t} \tag{1}$$

で与えられる場合の、多自由度質点-バネ系の振動方程式は、一般に次式

$$M \frac{d^2 d}{dt^2} + C \frac{dd}{dt} + Kd = P e^{i\omega t} \tag{2}$$

で与えられる。ここに、 M, K は質量および剛性マトリックスであり、 P, ω は外力の振幅および角速度、 t は時間である。任意の節点における変位 d と $f(t)$ の中に回転変位中とモーメント M を含むとき、 d および $f(t)$ または P の次元を合わせるために、マトリックス L を用い、

$$\begin{aligned} d &= l_0 L d' & P &= L P & L &= \text{diag} [L_i] & L_i &= \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \frac{1}{l_0} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \frac{1}{l_0} \end{bmatrix} \\ M' &= l_0 L M & C' &= l_0 L C L & K &= l_0 L K L \end{aligned}$$

とすれば、振動方程式は

$$M' \frac{d^2 d'}{dt^2} + C' \frac{dd'}{dt} + K' d' = P' e^{i\omega t} \tag{3}$$

$$\therefore \frac{E_0 A_0}{P_0} \left\{ \frac{\Omega_0^2 M'}{E_0 A_0} \frac{d d'}{d(\Omega_0 t)^*} + \frac{\Omega_0 C'}{E_0 A_0} \frac{d d'}{d(\Omega_0 t)^*} + \frac{K'}{E_0 A_0} d' \right\} = \frac{P'}{P_0} e^{i \frac{\Omega_0}{2} t} \quad (4)$$

ここに、 l_0 、 A_0 、 E_0 は、基準部材の長さ、断面積、弾性係数、 P_0 は基準外荷重であり、無次元積

$$M^* = \frac{\Omega_0^2 M'}{E_0 A_0}, \quad C^* = \frac{\Omega_0 C'}{E_0 A_0}, \quad K^* = \frac{K'}{E_0 A_0}, \quad d^* = \frac{E_0 A_0}{P_0} d', \quad \Omega^* = \frac{\Omega_0}{\Omega_0}, \quad t^* = \Omega_0 t$$

を定義すれば、次の無次元振動方程式を得るであろう。ここに Ω_0 は時間の逆数の次元をもつ。

$$M^* \frac{d^2 d^*}{dt^{*2}} + C^* \frac{d d^*}{dt^*} + K^* d^* = P^* e^{i \Omega^* t^*} \quad (5)$$

(1). M^* について — 質量マトリックス M のうち、任意部材端における質量マトリックスを \bar{M} とすれば、 $\bar{M} \equiv \rho A l \bar{M}'$ (ρ : 部材の密度, A : 部材断面積, l : 部材長) であり、

$$M^* = \frac{\Omega_0^2}{E_0 A_0} l_0 L_i \rho A l \bar{M}' L_i$$

$$= \Omega_0^2 \left(\frac{\rho_0 l_0^2}{E_0} \right) \frac{\rho}{\rho_0} \frac{A}{A_0} \frac{l}{l_0} (L_i \bar{M}' L_i) = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{A}{A_0} \frac{l}{l_0} L_i \bar{M}' L_i \quad (6)$$

ただし

$$\frac{1}{\Omega_0} = l_0 \sqrt{\frac{E_0}{P_0}} = \frac{l_0}{V_0}, \quad V_0 = \sqrt{\frac{E_0}{\rho_0}} \quad (7)$$

であり、このような Ω_0 を用いれば、 M^* を規定する無次元積は、 k_A 、 k_L 、 $L_i \bar{M}' L_i$ の中に含まれる細長比および、基準密度 ρ_0 に対する密度比 ρ であることが考察されよう。

(2). C^* について — 減衰が簡単な粘性減衰、構造減衰、履歴減衰等の何れの形式に従うかの如何にかかわらず、

$$C^* = \frac{\Omega_0 l_0}{E_0 A_0} (L_i C L_i) = \frac{1}{A_0 \sqrt{E_0}} (L_i C L_i) \quad (8)$$

の形をとる。

(3). Ω^* について —

$$\Omega^* = \frac{\Omega_0}{\Omega_0} = \frac{\Omega_0 l_0}{V_0} \quad (9)$$

は、一種のストローハル数であり、 V_0 は速度の次元をもつ、弾性体を伝わる実体波の速度を与える。

(4). d^* 、 t^* について、— 変化の無次元積としては、静的の場合と同じく

$$u^* = \frac{E_0 A_0}{P_0} \frac{u}{l_0}, \quad \phi^* = \frac{E_0 A_0}{P_0} \phi \quad (u \text{ は変位, } \phi \text{ は回転変位}) \quad (10)$$

である。また、時間の無次元積は、

$$t^* = \Omega_0 t = \frac{V_0 t}{l_0} \quad (11)$$

である。

(5). 減衰強制振動の相似律 — (5)式において、実物 P と模型 m に対して、同一の M^* 、 C^* 、 K^* 、 P^* を与えかつ

$$\left(\frac{\Omega_0 l_0}{V_0} \right)_P = \left(\frac{\Omega_0 l_0}{V_0} \right)_m, \quad \left(\frac{V_0 t}{l_0} \right)_P = \left(\frac{V_0 t}{l_0} \right)_m \quad (12)$$

となるように、強制振動を与えれば、(5)式より、まったく同じ \mathcal{U}^* を得るはずであり、

$$\left(\frac{E_0 A_0}{P_0} \frac{U}{l_0} \right)_p = \left(\frac{E_0 A_0}{P_0} \frac{U}{l_0} \right)_m, \quad \left(\frac{E_0 A_0}{P_0} \phi \right)_p = \left(\frac{E_0 A_0}{P_0} \phi \right)_m \quad (13)$$

なお、速度 v 、加速度 a の相似律は、(5)式左辺第2項、第1項より

$$\left(\frac{E_0 A_0}{P_0} \frac{v}{V_0} \right)_p = \left(\frac{E_0 A_0}{P_0} \frac{v}{V_0} \right)_m, \quad \left(\frac{E_0 A_0 l_0 a}{P_0 V_0^2} \right)_p = \left(\frac{E_0 A_0 l_0 a}{P_0 V_0^2} \right)_m \quad (14)$$

である。

(b). 自由振動の場合 (5)式において $\mathcal{U}^* = 0$, $P^* = 0$ とおけば、同様無次元積を得る。

3. トラス部材の二次応力について (5)式において $\Omega = 0$ の場合が静的弾性基礎式であり、無次元剛性マトリックス K^* は次に示す形状、変形の無次元積で表わされる。

(a). 形状および変形の無次元積

(1). 形状に関する無次元積

$k_A = \frac{A}{A_0}$: 部材断面積 A と基準部材断面積 A_0 の比、すなわち断面積比

$k_l = \frac{l}{l_0}$: 部材長 l と基準部材長 l_0 の比、すなわち部材長比

$K = \frac{I/l}{I_0/l_0}$: 基準部材に対する剛比、 I は部材断面二次モーメント

$C_F = \frac{z/r}{r}$: 縁距離 z の回転半径 $r (= \sqrt{I/A})$ に対する比、すなわち二次応力に関する断面係数

λ : 基準部材の細長比

なお、任意部材の細長比は、 $\lambda^2 = (k_A k_l \frac{1}{K}) \lambda_0^2$ によって求めることができる。

(2). 材料に関する無次元積

$k_E = \frac{E}{E_0}$: 部材弾性係数 E の基準部材弾性係数 E_0 に対する比、 ν : ポアソン比

(3). 荷重に関する無次元積

$P^0 = \frac{P}{P_0}$: 基準集中荷重 P_0 に対する任意点にかかる集中荷重の比、すなわち荷重比

$M^0 = \frac{M}{P_0 l_0}$: モーメント荷重比

(4). 変形に関する無次元積

$\frac{E_0 A_0}{P_0} \frac{U}{l_0}$: 変位 U の無次元積

$\frac{Y}{P_0} = \frac{Y}{Y_0}$: セット断力

$\frac{\sigma A_0}{P_0} = \sigma_0$: 応力の無次元積

$\frac{E_0 A_0}{P_0} \phi$: 回転変位 ϕ の無次元積

$\frac{M}{P_0 l_0} = \bar{M}$: モーメントの無次元積

$\frac{e E_0 A_0}{P_0}$: ひずみの無次元積

(b). 二次応力に関する無次元断面係数

二次応力の無次元積 σ_M^0 は、

$$\sigma_M^0 = \frac{A}{P_0} \sigma_M = \frac{1}{k_A} \cdot \frac{1}{k_l} \cdot \lambda^2 \bar{M} \cdot \frac{z}{l}$$





よって、

$$\frac{z}{l} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{z}{r} = \frac{1}{\lambda} C_F$$

であるから

$$\sigma_M^0 = \frac{1}{k_A} \cdot \frac{1}{k_l} \cdot \lambda \cdot \bar{M} \cdot C_F \quad (15)$$

表-1 形状と断面係数

断面形状	断面係数
矩形断面 	$C_F = 1.73$
H形断面 	$C_F = 1.22 \sqrt{2 + (A_1/A_2)}$ ($A_1 = bt$, $A_2 = ht'$)
箱形断面 (1) 	$C = 1.73 \sqrt{\frac{1 + (A_1/A_2) + 2(A_1/A_2)}{3 + 3(A_1/A_2) + 2(A_1/A_2)}}$ ($A = bt$, $A_1 = bt'$, $A_2 = h't'$)
箱形断面 (2) 	$C_F = 1.73 \sqrt{\frac{1 + (A_1/A_2)}{3 + (A_1/A_2)}}$ ($A_1 = bt$, $A_2 = ht'$)

を得る。断面係数 C_F は、部材断面形状固有の値であり、 C_F が小さいものほど、部材二次応力は小さくなる。表-1 に数個の断面についての C_F 、およびその計算例を示す。

なお、 $\bar{M}_0 \propto 1/\lambda^2$ 、 $\lambda = 2 C_F \frac{l}{R}$ であるから、

$$\sigma_M \propto C_F \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{l}{R} \right) \quad (16)$$

であり、近似的には二次応力 σ_M は l/R に逆比例することになる。

(c). 適用計算例と考察

図-1 に示す骨組形状、部材断面と表-2 の無次元積をもつトラスに、図示の外力比が載荷する場合を考える。たゞし、形状および外力はトラス中心線に好して好称であり、左半分のみを記入した。

面積比、剛比を一定とし、細長比 λ をパラメーターとして、無次元曲げモーメントを計算すると、図-2 のような結果が得られる。無次元セム断力についても同様であり、この図より、全部材が一樣に細長くなると、曲げモーメント、セム断力が小さくなることかわかる。

同一の条件の下で、軸力、変位は、ほとんど変化しない。したがって、二次応力は、(15)、(16) 式のとおりであり、曲げモーメント \bar{M}_0 は、細長比 λ の二乗に逆比例するから、曲げモーメントに基づく二次応力 σ_M は、 λ に逆比例するのである。(図-3)

参考文献

- 1) 福井武弘、三池亮次、右田泰弘 "立体骨組構造物の力学的相似条件について" 土木学会第25回年次学術講演会、昭和45年11月
- 2) 三池亮次、松本弘一 "トラス部材の細長比に関する一考察(第2報)" 土木学会第26回年次学術講演会、昭和46年10月
- 3) 三池、秋吉、松本 "骨組構造解析における相似律について" 土木学会西部支部研究発表会、昭和47年2月

表-2 トラスの諸無次元積

部材	1-2	2-3	3-4	4-5	1-3	2-4	3-5	4-6
部材長比(l_0)	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
細長比(λ)	83.68	156	118	191	195	23.63	199.4	82.0
断面積比(A_0)	1.0	0.6190	0.7778	0.5556	0.5714	1.0	0.7143	1.2778
剛比(K)	1.0	0.1477	0.3154	0.0857	0.0857	1.0	0.1073	1.3278

注) 1-2 部材の細長比を基準細長比とする。

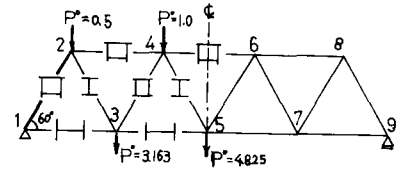


図-1 トラスの骨組形状、断面形状と外力

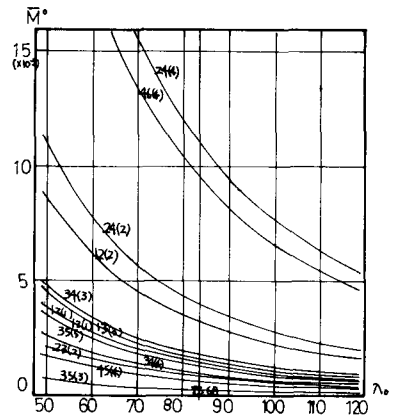


図-2 基準細長比曲げモーメント図

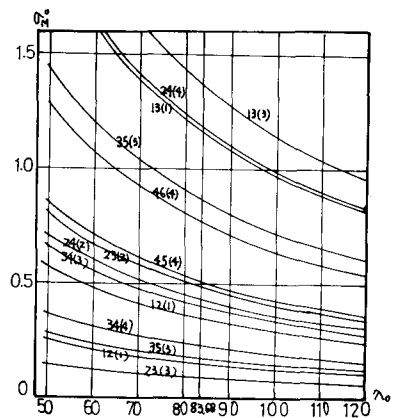


図-3 基準細長比二次応力図

注) 1 2 (2) は 1-2 部材の 2 節点における値を意味する。