I-127　　鉄筋コンクリート床板の非弾性変形解析

大阪市立大学　工学部　正員　倉田宗章
〃　　〃　○正員　園田恵一郎
大阪市都市再開発局　正員　出口太二

昨年の年次学術講演会（講演概要集 P.525 ）にて示したように鉄筋コンクリート床板の弾塑性たわみ解析の基本方程式は曲げモーメントおよび膜力の増分関係においてつぎのように表わすことができる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{M}_x \\ \dot{M}_y \\ \dot{M}_{xy} \\ \dot{M}_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{K}_x \\ \dot{K}_y \\ \dot{K}_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{n}_x \\ \dot{n}_y \\ \dot{n}_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{—— (1)}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\gamma}_x \\ \dot{\gamma}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{K}_x \\ \dot{K}_y \\ \dot{K}_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{n}_x \\ \dot{n}_y \\ \dot{n}_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{—— (2)}$$

$$\dot{K}_x = \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2},\quad \dot{K}_y = \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2},\quad \dot{K}_{xy} = \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial y},\quad \dot{n}_x = \frac{\partial^2 \dot{F}}{\partial y^2},\quad \dot{n}_y = \frac{\partial^2 \dot{F}}{\partial x^2},\quad \dot{n}_{xy} = -\frac{\partial^2 \dot{F}}{\partial x \partial y}$$

こゝに $\dot{w}$ はたわみ増分，$\dot{F}$ は応力関数の増分，$\{\dot{K}\}$ は曲率の増分，$\{\dot{n}\}$ は膜力の増分，$\{\dot{\varepsilon}\}$ は床板の中央面におけるひずみの増分，$[f_{kl}]$，$[g_{kl}]$ は中立面の変動にともなって発生する項で完全弾性状態ではゼロである。つぎに，応力つりあい方程式，ひずみ適合条件式は

$$\frac{\partial^2 \dot{M}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{M}_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \dot{M}_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \dot{M}_{yx}}{\partial x \partial y} = -\dot{p} \quad \text{—— (3)}$$

$$\frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_x}{\partial^2 y^2} + \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \dot{\gamma}_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \dot{\gamma}_y}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{—— (4)}$$

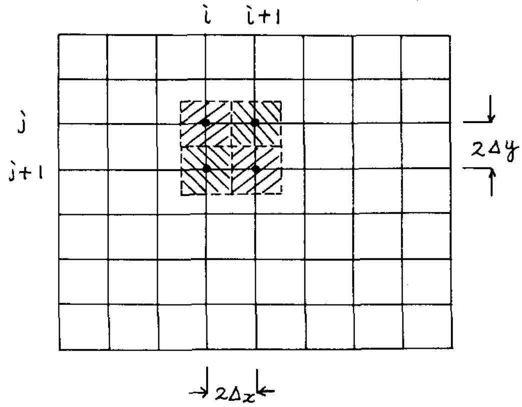
こゝにおいて，大たわみによる影響項は無視している。

さて，昨年度においては式(3)，式(4)を曲げモーメント増分$\{\dot{M}\}$，ひずみ増分$\{\dot{\varepsilon}\}$に関する差分式に置き換えて解析し，正方形床板に関する若干の数値計算データを得た。　その後矩形床板に対しても検討を加えたが，計算時間がかさみ，精度のよいデータを得ることが相当困難になることが予想されたので，　こゝでは差分式以外の方法で解析することを試みた。

式(1)，式(2)における $[d_{kl}]$，$[f_{kl}]$，$[g_{kl}]$，$[h_{kl}]$ は弾性状態では一定値をとるが，塑性状態になれば刻々と変化し，弾性領域と塑性領域の境界では不連続値をとることが考えられる。　したがっ

て，式(1)，式(2)を式(3)，式(4)に代入する際には$[d_{kl}]$，$[f_{kl}]$，$[g_{kl}]$，$[h_{kl}]$の微分をとらず，あくまでも曲げモーメントの増分およびひずみ増分の変化によって式(3)，式(4)を表わす必要がある。それゆえ，式(3)を以下のように書き換える。

いま，図－1に示すように床板を網目で切り，(i, j)，$(i+1, j)$，$(i, j+1)$，$(i+1, j+1)$の4点を考え，各点における断面性状$[d_{ij}]$，$[f_{ij}]$，$[g_{ij}]$，$[h_{ij}]$はその周辺（ハッチを施した部分）の平均値を表わすものとする。そして，有限な要素$(i, j)-(i+1, j)-(i+1, j+1)-(i, j+1)$を切り出し，この要素について応力つりあい条件を考える（図－2参照）



図－1

x軸の回わりのモーメントのつりあいにより，

$$\bar{Q}_x^2 = \frac{1}{\Delta x}\left\{ \int_0^{\Delta y} \dot{M}_x^{21} dy + \int_{\Delta y}^{2\Delta y} \dot{M}_x^{22} dy - \int_0^{\Delta y} \dot{M}_x^{11} dy - \int_{\Delta y}^{2\Delta y} \dot{M}_x^{12} dy + \int_0^{\Delta x} \dot{M}_{yx}^{11} dx + \int_{\Delta x}^{2\Delta x} \dot{M}_{yx}^{12} dx - \int_0^{\Delta x} \dot{M}_{yx}^{21} dx - \int_{\Delta x}^{2\Delta x} \dot{M}_{yx}^{22} dx \right\} - \bar{Q}_x^1 \qquad (5)$$

y軸の回わりのモーメントのつりあいにより，

$$\bar{Q}_y^2 = \frac{1}{\Delta y}\left\{ \int_0^{\Delta x} \dot{M}_y^{21} dx + \int_{\Delta x}^{2\Delta x} \dot{M}_y^{22} dx - \int_0^{\Delta x} \dot{M}_y^{11} dx - \int_{\Delta x}^{2\Delta x} \dot{M}_y^{12} dx + \int_0^{\Delta y} \dot{M}_{xy}^{11} dy + \int_{\Delta y}^{2\Delta y} \dot{M}_{xy}^{12} dy - \int_0^{\Delta y} \dot{M}_{xy}^{21} dy - \int_{\Delta y}^{2\Delta y} \dot{M}_{xy}^{22} dy \right\} - \bar{Q}_y^1 \qquad (6)$$

こゝに，

$$\bar{Q}_x^2 = \int_0^{\Delta y} \dot{Q}_x^{21} dy + \int_{\Delta y}^{2\Delta y} \dot{Q}_x^{22} dy, \quad \bar{Q}_x^1 = \int_0^{\Delta y} \dot{Q}_x^{11} dy + \int_{\Delta y}^{2\Delta y} \dot{Q}_x^{12} dy,$$

$$\bar{Q}_y^2 = \int_0^{\Delta x} \dot{Q}_y^{21} dx + \int_{\Delta x}^{2\Delta x} \dot{Q}_y^{22} dx, \quad \bar{Q}_y^1 = \int_0^{\Delta x} Q_y^{11} dx + \int_{\Delta x}^{2\Delta x} Q_y^{12} dx,$$

また，z軸方向の力のつりあいにより，

$$\bar{Q}_x^2 - \bar{Q}_x^1 + \bar{Q}_y^2 - \bar{Q}_y^1 = -\dot{p}\,\Delta x \Delta y \qquad (7)$$

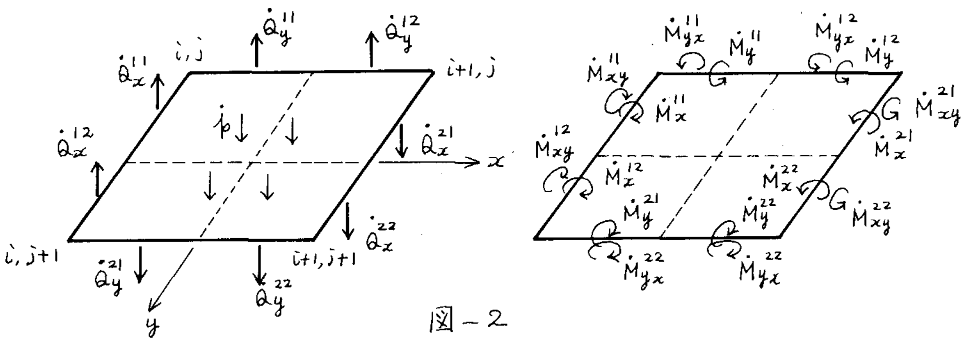
式(1) より，

$$\dot{M}_x^{11} = d_{11}^{i,j}\dot{k}_x + d_{12}^{i,j}\dot{k}_y + d_{13}^{i,j}\dot{k}_{xy} + f_{11}^{i,j}\dot{n}_x + f_{12}^{i,j}\dot{n}_y + f_{13}^{i,j}\dot{n}_{xy}$$

$$\dot{M}_x^{12} = d_{11}^{i,j+1}\dot{k}_x + d_{12}^{i,j+1}\dot{k}_y + d_{13}^{i,j+1}\dot{k}_{xy} + f_{11}^{i,j+1}\dot{n}_x + f_{12}^{i,j+1}\dot{n}_y + f_{13}^{i,j+1}\dot{n}_{xy}$$

$$M_x^{21} = d_{11}^{i+1,j}\dot{k}_y + d_{12}^{i+1,j}\dot{k}_y + d_{13}^{i+1,j}\dot{k}_{xy} + f_{11}^{i+1,j}\dot{n}_x + f_{12}^{i+1,j}\dot{n}_y + f_{13}^{i+1,j}\dot{n}_{xy}$$

これらの関係式を式(5)，式(6) に代入し，その結果を式(7)に代入すれば，曲げモーメント増分に関するつりあい方程式を誘導することができる。 なお，式(4) のひずみ適合条件式に対しても，式(3)のつりあい条件式と形が同じであることにより，前述の議論をそのまゝ適用することができ，式(7)と同等の条件式を導びくことができる。



図－2

つぎに，等分布荷重を受ける周辺単純支持された床板について式(7)の解法を示す。

たわみ関数の増分 $\dot{w} = \sum_{m=1,3,5,}\sum_{n=1,3,5} a_{mn}\cos\frac{m\pi x}{l_x}\cos\frac{n\pi y}{l_y}$

応力関数の増分 $\dot{F} = \sum_{m=1,3,5}\sum_{n=1,3,5} C_{mn}\cos\frac{m\pi x}{l_x}\cos\frac{n\pi y}{l_y}$

と仮定すれば，

$$\dot{k}_x = \frac{\partial^2\dot{w}}{\partial x^2} = -\sum_m\sum_n\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 a_{mn}\cos\frac{m\pi x}{l_x}\cos\frac{n\pi y}{l_y}$$

$$\dot{k}_y = \frac{\partial^2\dot{w}}{\partial y^2} = -\sum_m\sum_n\left(\frac{n\pi}{l_y}\right)^2 a_{mn}\cos\frac{m\pi x}{l_x}\cos\frac{n\pi y}{l_y}$$

$$\dot{k}_{xy} = \frac{\partial^2\dot{w}}{\partial x\partial y} = \sum_m\sum_n\left(\frac{mn\pi^2}{l_x l_y}\right) a_{mn}\sin\frac{m\pi x}{l_x}\sin\frac{n\pi y}{l_y}$$

$$\dot{n}_x = \frac{\partial^2\dot{F}}{\partial y^2} = -\sum_m\sum_n\left(\frac{n\pi}{l_y}\right)^2 C_{mn}\cos\frac{m\pi x}{l_x}\cos\frac{n\pi y}{l_y}$$

$$\dot{n}_y = \frac{\partial^2 \dot{F}}{\partial x^2} = -\sum_m \sum_n \left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 C_{mn} \cos\frac{m\pi x}{l_x} \cos\frac{n\pi y}{l_y}$$

$$\dot{n}_{xy} = -\frac{\partial^2 \dot{F}}{\partial x \partial y} = -\sum_m \sum_n \left(\frac{mn\pi^2}{l_x l_y}\right) C_{mn} \sin\frac{m\pi x}{l_x} \sin\frac{n\pi y}{l_y}$$

床板の対称軸線上，すなわち $\bar{Q}_x' = \bar{Q}_y' = 0$ のところから出発し，上式を式(7)のつりあい条件式と適合条件式に相当する式に代入すれば，一つの要素 k に対してつぎの関係式が得られる。

$$\sum_m \sum_n G_{11}^k(i,j,m,n)\, a_{mn} + \sum_m \sum_n G_{12}^k(i,j,m,n)\, C_{mn} - 4\dot{p}\Delta x \Delta y = 0 \qquad (8)$$

$$\sum_m \sum_n G_{21}^k(i,j,m,n)\, a_{mn} + \sum_m \sum_n G_{22}^k(i,j,m,n)\, C_{mn} = 0 \qquad (9)$$

要素全体に対して，式(8)，式(9)の誤差の自乗の和をつくれば，

$$I = \sum_k \left[\alpha(k) \left\{ \sum_m \sum_n G_{11}^k(i,j,m,n)\, a_{mn} + \sum_m \sum_n G_{12}^k(i,j,m,n)\, C_{mn} - 4\dot{p}\Delta x \Delta y \right\}^2 + \beta(k) \left\{ \sum_m \sum_n G_{21}^k(i,j,m,n)\, a_{mn} + \sum_m \sum_n G_{22}^k(i,j,m,n)\, C_{mn} \right\}^2 \right]$$

こゝに，$\alpha(k)$，$\beta(k)$ は重み関数，よって

$$\frac{\partial I}{\partial a_{pq}} = 2\sum_m \sum_n \left[\sum_k \left\{ \alpha(k) G_{11}^k(i,j,p,q) G_{11}^k(i,j,m,n) + \beta(k) G_{21}^k(i,j,p,q) \cdot G_{21}^k(i,j,m,n) \right\} a_{mn} + \sum_k \left\{ \alpha(k) G_{11}^k(i,j,p,q) \cdot G_{12}^k(i,j,m,n) + \beta(k) G_{21}^k(i,j,p,q) G_{22}^k(i,j,m,n) \right\} C_{mn} \right] + 4\dot{p}\Delta x \Delta y \sum_k \alpha(k) \cdot G_{11}^k(i,j,p,q) = 0 \qquad (10)$$

$$\frac{\partial I}{\partial C_{pq}} = 2\sum_m \sum_n \left[\sum_k \left\{ \alpha(k) G_{12}^k(i,j,p,q) G_{11}^k(i,j,m,n) + \beta(k) G_{22}^k(i,j,p,q) \cdot G_{21}^k(i,j,m,n) \right\} a_{mn} + \sum_k \left\{ \alpha(k) G_{12}^k(i,j,p,q) G_{12}^k(i,j,m,n) + \beta(k) G_{22}^k(i,j,m,n) \cdot G_{22}^k(i,j,m,n) \right\} C_{mn} \right] + 4\dot{p}\Delta x \Delta y \sum_k \alpha(k) G_{12}^k(i,j,p,q) = 0 \qquad (11)$$

上式は a_{mn}，C_{mn} に関する連立方程式であるから，これを解くことによって a_{mn}，C_{mn} そして $\{\dot{\kappa}\}$，$\{\dot{n}\}$ が決定できる。