I-123　コンクリート橋の折板理論による展開（第一報）

首都高速道路公団　正会員　○小村　敏
住友建設株式会社　正会員　則武邦具
〃　本間秀世

1. はじめに

一般にコンクリート桁橋は、はり構造を基本とした形で、床版構造とは分けられ、それぞれ単独に解かれているが、多元面構造の一種として、折板理論で立体的に解析することができる。こゝで用いた折板理論は、橋軸方向に折板要素をとり、二次元的に面内作用、面外作用を勘案しつゝ、フーリエ変換による弾性理論を基本としている。今回は、完成したプログラム（FOLPLATE）を中心として数種の計算から得られた結果の比較ならびに実測値との対比を第一報の形で報告する。

2. 計算式の概要

各折板要素の両端に水平力、鉛直力、軸力、回転力の４つの力と、それに相当する４つの変位をとる（図－１）。両端での力［F］と変位［D］はある係数—剛性マトリックスで関係づけられる。

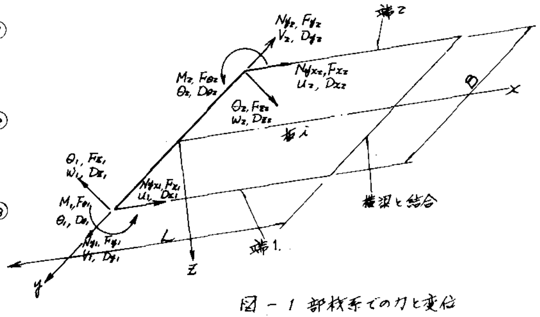
即ち、

板の基本方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{K}p_x(x,y) \quad ①$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{K}p_y(x,y) \quad ②$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{1}{D}p_z(x,y) \quad ③$$



図－１　部材系での力と変位

対称、逆対称から上式を解いて、

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}_i \quad (4a)$$

$$\begin{bmatrix} Nyx_1 \\ Nyx_2 \\ Ny_1 \\ Ny_2 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\ K_{65} & K_{66} & K_{67} & K_{68} \\ K_{75} & K_{76} & K_{77} & K_{78} \\ K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_i \quad (5a)$$

略記して

$$[F_s]_i=[K_s]_i[D_s]_i \quad (4b) \qquad [F_P]_i=[K_P]_i[D_P]_i \quad (5b)$$

こゝで

$$K_{11} = \frac{2\beta}{B}\frac{D}{A}(\sinh\beta\cosh\beta - \beta) = K_{22} \qquad K_{12} = \frac{2\beta}{B}\frac{D}{A}(\beta\cosh\beta - \sinh\beta)$$

$$K_{13} = \left(\frac{\beta}{B}\right)^2 D\left[\frac{1}{A}(\sinh^2\beta + \beta^2) + \nu\right] = K_{24} \qquad K_{14} = 2\left(\frac{\beta}{B}\right)^2\frac{D}{A}(\beta\sinh\beta) = K_{23}$$

$$K_{33} = 2\left(\frac{\beta}{B}\right)^3\frac{D}{A}(\cosh\beta\sinh\beta + \beta) = K_{44} \qquad K_{34} = 2\left(\frac{\beta}{B}\right)^3\frac{D}{A}(\beta\cosh\beta + \sinh\beta) = K_{43}$$

$$K_{55} = 2\frac{D'}{A'}\left(\frac{\beta}{B}\right)(\beta - \lambda\cosh\beta\sinh\beta) = K_{66} \qquad K_{56} = -2\frac{D'}{A'}\left(\frac{\beta}{B}\right)(\beta\cosh\beta - \lambda\sinh\beta) = K_{65}$$

$$K_{57} = -2D'\left(\frac{\beta}{B}\right)\left[\frac{1}{A'}(\lambda\sinh^2\beta) + \frac{1+\nu}{2}\right] = K_{68} \qquad K_{58} = -2\frac{D'}{A'}\left(\frac{\beta}{B}\right)(\beta\sinh\beta) = K_{67}$$

$$K_{77} = -2\frac{D'}{A'}\left(\frac{\beta}{B}\right)(\beta + \lambda\cosh\beta\sinh\beta) = K_{88} \qquad K_{78} = -2\frac{D'}{A'}\left(\frac{\beta}{B}\right)(\beta\cosh\beta + \lambda\sinh\beta) = K_{87}$$

$$\beta = \frac{n\pi B}{L}, \qquad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, \qquad D' = \frac{Et}{(1+\nu)^2}$$

$$A = \sinh^2\beta - \beta^2 \qquad A' = \beta^2 - \lambda^2\sinh^2\beta \qquad \lambda = \frac{3-\nu}{1+\nu}$$

依って単板での関係は次式で表わされる。

$$[F_i]_i = \left[\frac{F_s}{F_p}\right]_i \left[\begin{array}{c|c} K_s & 0 \\ \hline 0 & K_p \end{array}\right]_i \left[\frac{D_s}{D_p}\right]_i = [K]_i\ [D]_i \quad \text{⑥}$$

次に構造系（$\bar{F}, \bar{D}$）と部材系（F, D）との力と変位の関係を、変換行列[A]で結びつける。

$$[D]_i = [A]_i\ [\bar{D}]_i \quad \text{⑦} \qquad [\bar{F}]_i = [A]_i^T\ [F]_i \quad \text{⑧}$$

故に

$$[\bar{F}]_i = [A]_i^T[F]_i = [A]_i^T[K]_i[A]_i[D]_i = [\bar{K}]_i[D]_i \quad \text{⑨}$$

こゝで

$[\bar{K}]_i = [A]_i^T[K]_i[A]_i$ は構造全体の剛性マトリックスである。

便宜的に次式の形にしておく。

$$[\bar{F}]_i = \left[\frac{\bar{F}_1}{\bar{F}_2}\right]_i = \left[\begin{array}{c|c} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \hline \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} \end{array}\right]_i \left[\frac{\bar{D}_1}{\bar{D}_2}\right]_i \quad \text{⑩}$$

全体構造系で折板の接合点に作用する力[R]は、外的に作用する力$[R^0]$と固定端力$[R^f]$との総和で表わされるので

$$[R]_i = [R^0]_i + \Sigma[R^f]_i \quad \text{⑪}$$

固定端力$[F^f]_i$は次式から構造系での固定端力$[R^f]$に変換できる。

$$[R^f]_i = \left[\frac{R_1^f}{R_2^f}\right]_i = [A]_i[F^f]_i \quad \text{⑫}$$

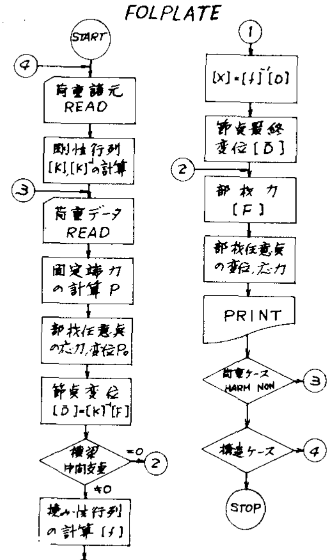


図-2 フローチャート

よって各折板要素での固定端力の計算から、上記の式より、構造系での変位が求まり、以下変換行列を用いて、各折板要素ごとの変位とし、これから断面力が求められる。

次に中間拘束がある場合には、不静定拘束力[X]をとり、それに相当する変位[D]，撓み性マトリックス[f]とすると、

$$[f][X]=[D] \text{ ——— } ⑬$$

最終変位[u]，拘束のない場合の実変形量[Δ]，変換行列[B]とすると、

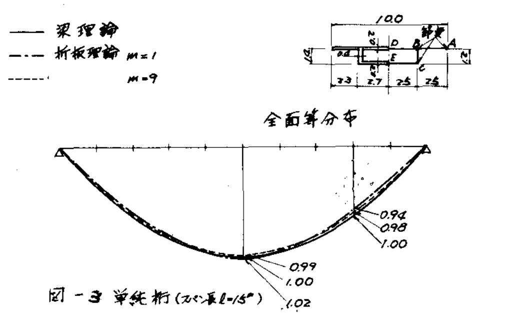
$$[f][X]-[B]^T[u]=-[\Delta] \text{ ——— } ⑭$$

の関係から，不静定拘束力[X]を考慮した変位を求め、①式から以後の計算を繰返す。

3. 数値計算

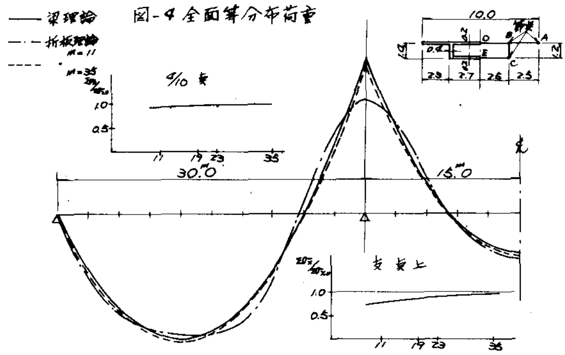
いくつかの数値計算から、フーリエ級数の項数、スパン／主桁巾と各応力度との関係，ならびに2主桁橋の実験桁との比較をあげてみる。

数値の項数を、下床版に生ずる力 $\Sigma\sigma_x$ ではり理論と比較したもの、一例を図－3，図－4にあげる。単純桁，3径間連続桁とも発散の傾向はみられず、前者の場合，$m=9$ 項でほとんど近似しており、後者では、一部中間支点部を除き $m=23$ 項で十分に収束している。支点部附近では、$m=35$ 項で、約95％の値を示すが、支点上の影響による低減があるので実用上は何ら差支えない。



図－3 単純桁(スパン長 l=15m)

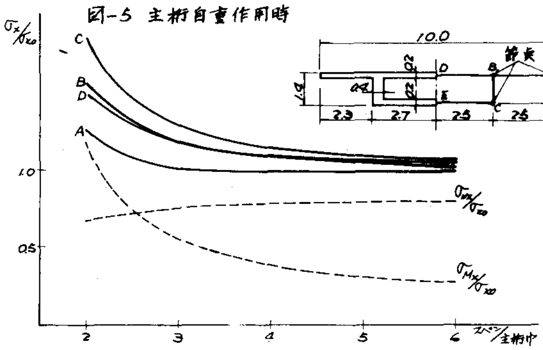
図-4 全面等分布荷重



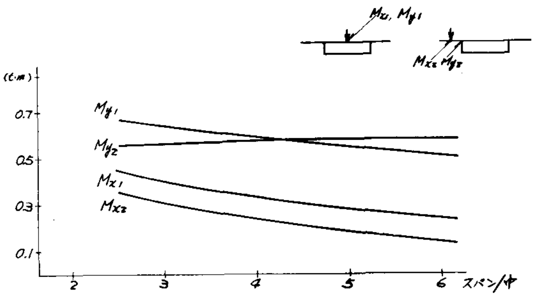
次に主桁自重作用時のスパン／主桁巾と断面の上下縁に生ずる応力度 σ_x との関係を，図－5に示すと主桁巾の約6倍でほゞ均一な応力分布となる。集中荷重が載荷した場合の床版に生ずる曲げモーメント M_x，M_y については図－6に示す。また図－7に集中荷重のおよぼす影響範囲をあげておく。ポアソン比 $\nu=0$ と $\nu=1/6$ の断面力にはほとんどその影響があらわれない。

箱型断面で中間横梁を設けると、床版に生ずる軸方向応力度は約78％に減ずる。偏載荷時ではスパンが15m の場合約15％分配するが、スパン長が20m をこえるとその影響はみられない。

図－5 主桁自重作用時

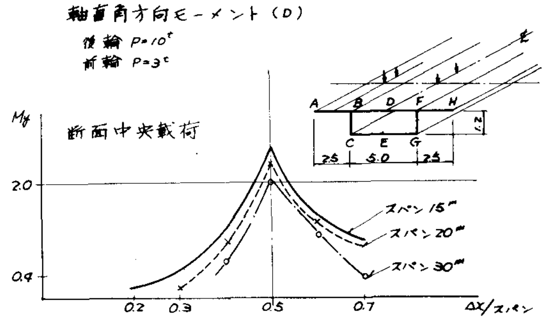


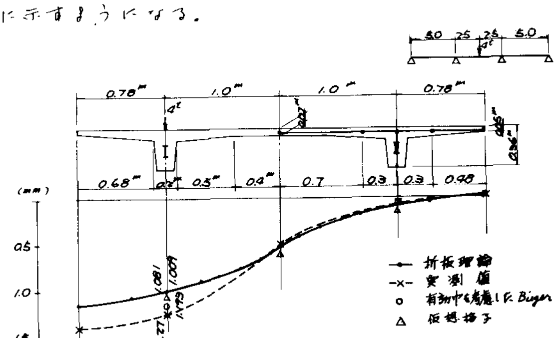
次に3径間連続構造の2主桁橋の実験桁（S=1/5）を、今回開発した FOLPLATE, BIEGER の2主桁理論及び仮想格子桁による解と、実験値を比較してみる。この場合、弾性係数は実測値からタンゼントモデュラス法によって求めた $E_c = 3.4 \times 10^6$ t/m², $\nu = 0.17$ を採用した。この解析にあたっては、級数の項数を $m = 47$, $u = 47$ とした。鉛直たわみの一例を図−8にあげてみると、載荷点側では実験値の方が大きめにでているが、傾向としては同一の形状を示しており、また各理論値は、本解法より多少大きめに計算される。このことは弾性係数、仮想有効巾員（λ/B）などのバラツキ、支点沈下、測定誤差など種々の条件の影響に起因するものと思われる。また分配曲線を図−9に、主桁上に載荷した場合の応力分布を図−10に示す。それらは実測値とかなりよく近似している。求められた応力分布から有効巾を算定してみると図中に示すようになる。



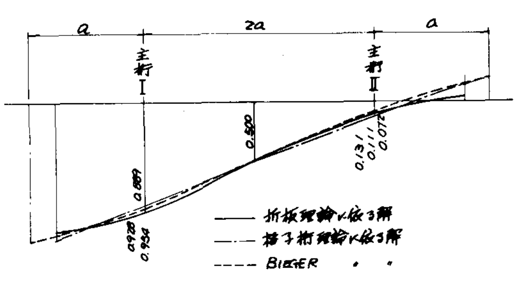
図−6 集中荷重作用時

図−7
集中荷重載荷の場合のスパン長の影響
軸直角方向モーメント（D）

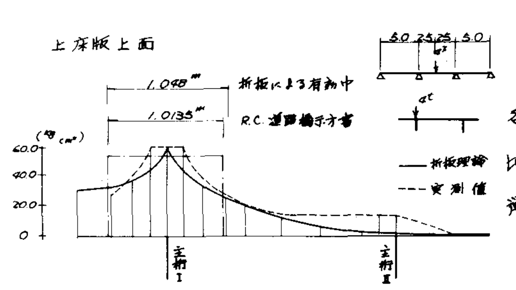




図−8 鉛直たわみ



図−9 横方向分配



図−10 軸方向応力度分布（σ_x）

4. あとがき

今回は折板理論によって、とくにスパン／主桁巾と各応力度、ならびに2主桁橋の各理論値と実験値との比較を報告したが、今後、横分配効果など調べ、また弾性支承上の構造物の解析にも拡張する。

参考文献は、コンクリートジャーナル Vol. 10, No. 1, Jan. 1972, "折板構造に関する既往の研究について（下）" を参照されたい。