I-121　一方向連続扇形平板の解法

九州大学　工学部　学生員　○大塚久哲
川崎製鉄株式会社　正　員　金子忠男

(1) 緒　言

曲線橋床版に見られるごとき周辺がはりにて弾性支持される扇形平板の力学的特性を解明する為、著者らは先に直線ばりあるいは曲りばりにて弾性支持される扇形平板の解法を発表[(1),(2)]し、扇形平板と骨組との間に生ずる力学的相互作用を明らかにしたが、本研究はそれらを応用拡張させ、直線ばりを介して接線方向に連続なる構造形式を有する扇形平板が、連続曲りばりにて弾性支持される場合の解法を提示するものである。解析の手段としては、文献(1)に示されているごとく差分法によって十分満足できる精度の解が得られることが認められたので、本研究においても差分法を適用する。

(2) 解　法

本研究において解析の対象とする一方向連続扇形板は図1のごとく、異なる半径を有する扇形平板が直線ばりを介して接線方向に連続し、内側および外側円弧辺が連続曲りばりにて弾性支持されるもので、直線ばり、曲りばりは共に曲げおよびねじりに対する剛度を有するものとし、曲りばりは支承上において曲げ変形に対してヒンジ、ねじれ変形に対して固定の支持状態になっているものとする。

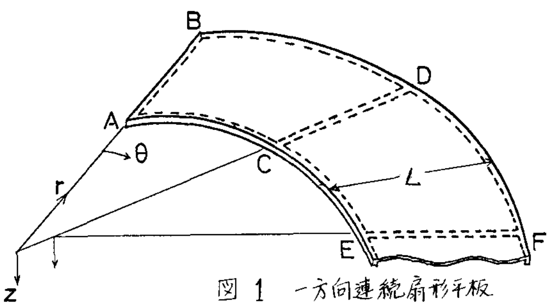


図1　一方向連続扇形平板

1. 基礎微分方程式の差分化

いま各扇形平板を図2に示すごとく放射状格子に分割して格点に番号を付すとき、格点(i,j)において板の基礎微分方程式を差分化すれば次式を得る。

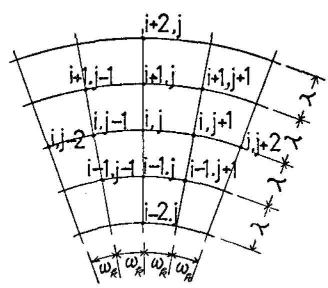
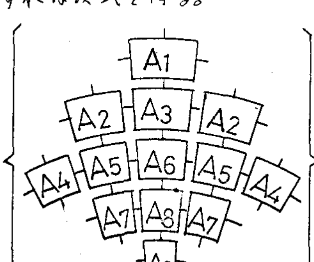


図2　格点番号



$$w = \frac{p\lambda^4}{D} \quad \cdots\cdots (1)$$

ここに、$A_1 = 1 + \lambda / r_{ki}$

$A_4 = K_k^4 / r_{ki}^4$

$A_9 = 1 - \lambda / r_{ki}$

$A_2 = 2K_k^2(1 - \lambda/2r_{ki}) / r_{ki}^2$

$A_3 = -4(1 + \lambda/2r_{ki}) - (1 - \lambda/2r_{ki})(\lambda^2 + 4K_k^2)/r_{ki}^2$

$A_5 = -4K_k^2\{1 - (\lambda^2 - K_k^2)/r_{ki}^2\}/r_{ki}^2$

$A_6 = 2\{3 + (\lambda^2 + 4K_k^2)/r_{ki}^2 - K^2(4\lambda^2 - 3K_k^2)/r_{ki}^4\}$

$A_7 = 2K_k^2(1 + \lambda/2r_{ki})/r_{ki}^2$　，　$A_8 = -4(1 - \lambda/2r_{ki}) - (1 + \lambda/2r_{ki})(\lambda^2 + 4K_k^2)/r_{ki}^2$，

λ；半径方向格子間隔　，ω_k；板kの接線方向格子間隔　，$K_k = \lambda/\omega_k$　，p；垂直荷重

r_{ki}；板kの中心0より格点(i,j)までの距離　，$D_k = E_p^k h_p^{k3}/12(1-\nu^2)$；板剛度　，$E_p^k$；板のヤング率

h_p^k；板厚　，ν；ポアッソン比

式(1)を扇形平板のすべての格点においてたて、その際含まれる板外の仮想格点と同数の境界条件

式とを連立させて解けば所要の未知数$w_{i,j}$が求まり、得られた結果を板の諸断面力とたわみwの関係式に代入することによって、すべての格点における断面力が容易に計算されることになる。

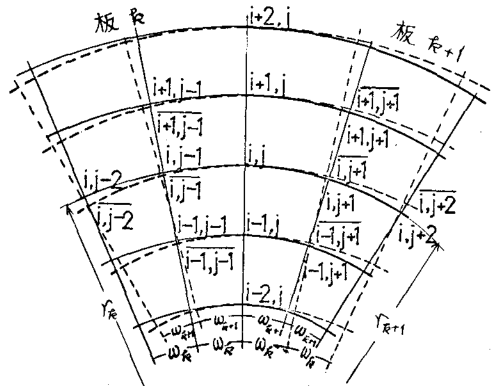


図３ 板の接続箇所における格点番号

2. 直線辺の境界条件式

半径方向格子間隔入はすべての扇形平板において同一長さを有するものとすれば、扇形平板の接続箇所は一般に図３のごとく表わせる。ここに破線は仮想の板を示し、格点番号上の──は、その格点が仮想格点であることを示す。扇形平板のたわみ面は、接続箇所で共通の切線を有するから次式が成立する。

$$\frac{1}{r_k}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)_k = \frac{1}{r_{k+1}}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)_{k+1} \quad \text{------(2)}$$

上式を格点(i, j)においてたてた差分式に変換すれば(3)式を得る。

$$w_{i,\overline{j+1}} - w_{i,j-1} = r_{k,i}\,\omega_k / r_{k+1,i}\,\omega_{k+1}\,(w_{i,j+1} - w_{\overline{i,j-1}}) \quad \text{------(3)}$$

次に接続箇所における力の釣合を考えると(図４参照)、z軸方向の力の釣合より(4)式、r軸まわりのモーメントの釣合より(5)式を得る。

$$V_\theta^{k} - q - V_\theta^{k+1} - dF^{k+1}/dr = 0 \quad \text{-------(4)}$$

$$M_\theta^{k} - M_\theta^{k+1} + dT^{k+1}/dr = 0 \quad \text{------(5)}$$

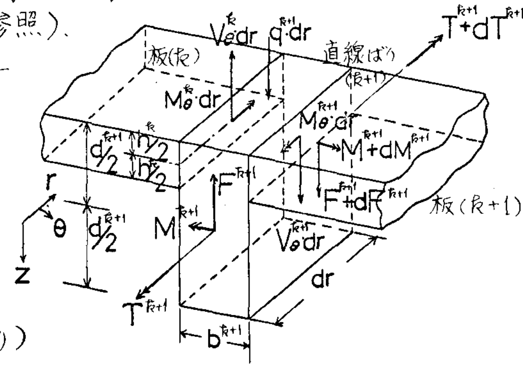


図４ 板とはりの接合部における力の釣合

ただし、はりの幅b^{k+1}、および板とはりの中立軸間距離$(d^{k+1}-h^{k})/2$は無視し得るものと仮定している。

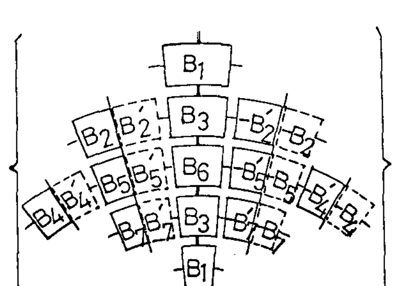
$V_\theta^k, V_\theta^{k+1}$；板$k$, $k+1$の板反力(単位長さあたり)

$M_\theta^k, M_\theta^{k+1}$；板$k$, $k+1$の曲げモーメント(　〃　)

q^{k+1}；はりに作用する単位長さあたり垂直荷重

F^{k+1}, T^{k+1}；はり$k+1$の剪断力およびねじりモーメント

(4), (5)式を差分式に変換すれば(6)および(7)式を得る。



$$w = \frac{q^{k+1}\lambda^3}{D_k} \quad \text{----(6)}$$

ここに、$B_1 = H_r^{k+1} \cdot m$, $H_r^{k+1} = E_b^{k+1} \cdot I_b^{k+1} / D_k \cdot m \cdot \lambda$

$E_b^{k+1} \cdot I_b^{k+1}$；直線ばり$k+1$の曲げ剛度

m；半径方向分割数

$B_3 = -4 \cdot B_1$, $B_6 = 6 \cdot B_1$, $D_c = D_{k+1}/D_k$

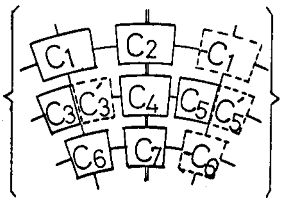
$B_4 = K_k^3 / 2 r_{k,i}^2$, $B_4' = -D_c \cdot K_{k+1}^3 / 2 r_{k+1,i}^3$

$B_2 = K_k / r_{k,i} \{(2\nu - 1)\lambda / 4 r_{k,i} + 1 - \nu/2\}$

$B_2' = -D_c K_{k+1} / r_{k+1,i} \{(2\nu - 1)\lambda / 4 r_{k+1,i} + 1 - \nu/2\}$

$B_5 = -K_k / r_{k,i} \{K_k^2 / r_{k,i}^2 + (\nu - 1)\lambda^2 / r_{k,i}^2 + 2 - \nu\}$, $B_7 = -K_k / r_{k,i} \{(2\nu - 1)\lambda / 4 r_{k,i} - 1 + \nu/2\}$

$B_5' = D_c \cdot K_{k+1} / r_{k+1,i} \{K_{k+1}^2 / r_{k+1,i}^2 + (\nu - 1)\lambda^2 / r_{k+1,i}^2 + 2 - \nu\}$, $B_7' = D_c \cdot K_{k+1} / r_{k+1,i} \{(2\nu - 1)\lambda / 4 r_{k+1,i} - 1 + \nu/2\}$



$w = 0$ ----(7)

ここに、$C_1 = -Z_r^{k+1} \cdot m \cdot K_k / 2 \cdot r_k$, $Z_r^{k+1} = G_b^{k+1} C_b^{k+1} / D_k m\lambda$

$G_b^{k+1} C_b^{k+1}$; 直線ばり$k+1$のねじり剛度

$C_2 = \nu(D_c - 1) - \lambda/2 \cdot (1/r_{k,i} - D_c/r_{k+1,i})$

$C_3 = Z_r^{k+1} \cdot m \cdot K_k / r_{k,i} + K_k^2 / r_{k,i}^2$

$C_4 = 2\nu(1 - D_c) + 2(K_k^2/r_{k,i}^2 - D_c \cdot K_{k+1}^2 / r_{k+1,i}^2)$

$C_5 = D_c \cdot K_{k+1}^2 / r_{k+1,i}^2$, $C_6 = -Z_r^{k+1} \cdot m \cdot K_k / 2 r_k$, $C_7 = \nu(D_c - 1) + \lambda(1/r_{k,i} - D_c/r_{k+1,i})/2$

$C_3' = -D_c K_{k+1}^2 / r_{k+1,i}^2$, $C_5' = -Z_r^{k+1} m \cdot K_k / r_{k,i} - K_k^2 / r_{k,i}^2$

ただし、式(6),(7)中において で囲まれた係数は、仮想格点の係数であることを示す。

3. 円弧辺の境界条件式

扇形平板(k)の内側円弧辺と曲りばりとの接合部における力のつりあいを考えると(図5参照)、z軸方向の力のつりあいから、

$$V_r^k + \bar{q}^k + dF_k'/ds = 0 \quad \text{-----(8)}$$

θ軸まわりのねじりモーメントのつりあいより、

$$dT_k'/ds + M_k'/R_k - M_r^k = 0 \quad \text{---(9)}$$

曲りばりの中立軸における曲げモーメントのつりあいより、

$$dM_k'/ds - T_k'/R_k - F' = 0 \quad \text{----(10)}$$

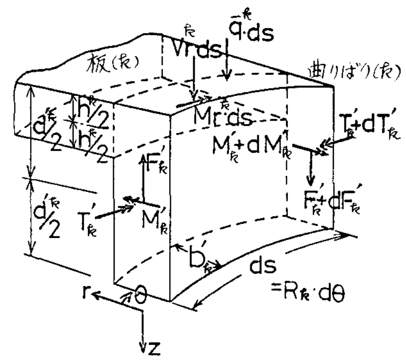


図5 板と曲りばりの接合部における力の釣合

(8)および(10)式よりF'を消去すると、

$$V_r^k + \bar{q}^k + d^2M_k'/ds^2 - dT_k'/ds \cdot 1/R_k = 0 \quad \text{---(11)}$$

ここに、V_r^k, M_r^k ; 板kの反力および曲げモーメント(単位長さあたり)

$\bar{q}^k$; 曲りばりkに作用する単位長さあたりの垂直荷重 , R_k ; 曲りばりkの半径

F_k', M_k', T_k' ; 曲りばりkの剪断力、曲げモーメント、およびねじりモーメント

さらに曲りばりの断面力M_k', T_k'と変形量との関係を考慮すれば、(9)式および(11)式は次式のように書きあらわすことができる。

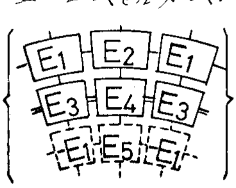
$$\frac{1}{R_k^2}\left(\frac{\bar{E}_b^k \bar{I}_b^k}{D_k} + \frac{\bar{G}_b^k \bar{C}_b^k}{D_k}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + \frac{1}{R_k}\cdot\frac{\bar{E}_b^k \bar{I}_b^k}{D_k}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right) - \frac{1}{R_k}\cdot\frac{\bar{G}_b^k \bar{C}_b^k}{D_k}\cdot\frac{\partial^3 w}{\partial r \partial\theta^2} - R_k\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{R_k}\cdot\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{R_k^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right] = 0$$

$$\frac{1}{R_k^4}\cdot\frac{\bar{E}_b^k \bar{I}_b^k}{D_k}\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4} + \frac{1}{R_k^3}\left(\frac{\bar{E}_b^k \bar{I}_b^k}{D_k} + \frac{\bar{G}_b^k \bar{C}_b^k}{D_k}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial r \partial\theta^2} - \frac{1}{R_k^4}\cdot\frac{\bar{G}_b^k \bar{C}_b^k}{D_k}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}$$

$$+\left[\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{R_k^2}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{R_k}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{3-\nu}{R_k^3}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + \frac{2-\nu}{R_k^2}\cdot\frac{\partial^3 w}{\partial r \partial\theta^2}\right] = \frac{\bar{q}_k}{D_k}$$

ここに、$\bar{E}_b^k \bar{I}_b^k$, $\bar{G}_b^k \bar{C}_b^k$; 曲りばりkの曲げ剛度およびねじり剛度

上の2式を差分式に変換すれば(12)式および(13)式を得る。



$w = 0$ ---(12)

ここに、$E_1 = -m Z_\theta^k / 2\omega_k^2$, $Z_\theta^k = \bar{G}_b^k \bar{C}_b^k / D_k m\lambda$

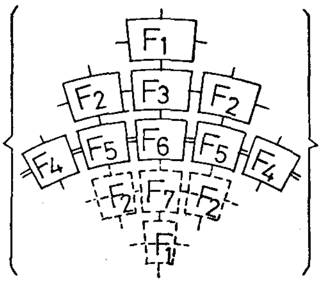
$E_2 = m H_\theta^k / 2 + m Z_\theta^k / \omega_k^2 - R_k^2/\lambda^2 - \nu R_k / 2\lambda$

$H_\theta^k = \bar{E}_b^k \bar{I}_b^k / D_k m\lambda$

$E_3 = m\lambda(H_\theta^k + Z_\theta^k)/R_k \omega_k^2 - \nu/\omega_k^2$

$$E_4 = -2m\lambda(H_\theta^k + Z_\theta^k)/R_k\omega_k^2 + 2R_k^2/\lambda^2 + 2\nu/\omega_k^2$$

$$E_5 = -mH_\theta^k/2 - mZ_\theta^k/\omega_k^2 + \nu R_k/2\lambda - R_k^2/\lambda^2$$



$$W = \frac{q\lambda^3}{D_k} \quad \cdots (13)$$

ここに、$F_1 = 1/2$

$$F_2 = mK_k^2(H_\theta^k + Z_\theta^k)\lambda/2R_k^3 + K_k^2(2-\nu)/2R_k^2$$

$$F_3 = -m(H_\theta^k + Z_\theta^k)K_k^2\lambda/R_k^3 - 1 + \lambda/R_k - \lambda^2/2R_k^2 - (2-\nu)K_k^2/R_k^2$$

$$F_4 = mH_\theta^k K_k^4/R_k^4$$

$$F_5 = K_k^2(\nu-3)\lambda/R_k^3 - mK_k^2(4H_\theta^k K_k^2 + Z_\theta^k\lambda^2)/R_k^4$$

$$F_6 = 2mK_k^2(3H_\theta^k K_k^2 + Z_\theta^k\lambda^2)/R_k^4 - 2\lambda\{R_k^2 - (3-\nu)K_k^2\}/R_k^3$$

$$F_7 = m(H_\theta^k + Z_\theta^k)K_k^2\lambda/R_k^3 + 1 + \lambda/R_k + \lambda^2/2R_k^2 + (2-\nu)K^2/R_k^2$$

同様の手法により外側円弧辺上における境界条件式も誘導することができるがここでは省略する。

4. 支承における境界条件式

本題における曲りばりは支承上において曲げ変形に対してヒンジ、ねじれ変形に対して固定の支持状態になっているものと仮定しているので、支承上の格点 (i,j) において $(M_\theta)_{i,j} = 0$、および $(\partial w/\partial r)_{i,j} = 0$ が成りたたねばならない。したがって両式を差分化すれば次の二式を得る。

$$(\nu - \lambda/2r_i)w_{i-1,j} + (\nu + \lambda/2r_i)w_{i+1,j} + K^2/r_i^2(w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) = 0 \quad \cdots (14)$$

$$w_{i+1,j} - w_{i-1,j} = 0 \quad \cdots (15)$$

なお支承上における支持状態が、点支持であれば $(M_\theta)_{i,j} = (M_r)_{i,j} = 0$、固定であれば、$(\partial w/\partial r)_{i,j} = (\partial w/\partial\theta)_{i,j} = 0$ が成立するから、これらを差分表示すればそれぞれの支持状態における支承上の境界条件式が得られることになる。

5. 剛比

扇形平板の幅を $L(=m\lambda)$〔図1参照〕とし、$\alpha_k = L/h_p^k$, $\beta_k = d_k/b_k$, $\gamma_k = b_k/h_p^k$, $\bar{\beta}_k = d'_k/b'_k$, $\bar{\gamma}_k = b'_k/h_p^k$ なる変数を導入するとき、直線ばり、曲りばりの曲げ剛度およびねじり剛度と板の剛度との比、すなわち、H_r^k, H_θ^k, Z_r^k および Z_θ^k は次のように書きあらわせる。

$$H_r^k = \frac{E_b^k I_b^k}{D_k m\lambda} = (1-\nu^2)\frac{E_b^k \beta_k^3}{E_p^k \alpha_k}\gamma_k^4, \qquad H_\theta^k = \frac{\bar{E}_b^k \bar{I}_b^k}{D_k m\lambda} = (1-\nu^2)\frac{E_b^k \bar{\beta}_k^3}{E_p^k \alpha_k}\bar{\gamma}_k^4$$

$$Z_r^k = \frac{G_b^k C_b^k}{D_k m\lambda} = \frac{3(1-\nu)E_b^k}{8\alpha_k E_p^k}\gamma_k^4\beta_k\left[\frac{16}{3} - 3.36\frac{1}{\beta_k}\left(1 - \frac{1}{12\beta_k^4}\right)\right]$$

$$Z_\theta^k = \frac{\bar{G}_b^k \bar{C}_b^k}{D_k m\lambda} = \frac{3(1-\nu)E_b^k}{8\alpha_k E_p^k}\bar{\gamma}_k^4\bar{\beta}_k\left[\frac{16}{3} - 3.36\frac{1}{\bar{\beta}_k}\left(1 - \frac{1}{12\bar{\beta}_k^4}\right)\right]$$

ただし C_b^k, $\bar{C}_b^k$ は R.J. Roark[(3)] の近似式にしたがった。

したがって変数 α_k, β_k, γ_k, $\bar{\beta}_k$, $\bar{\gamma}_k$ の値をそれぞれ種々変化させていくことによって扇形平板と弾性支持ばりとの力学的相互作用が解明できることになる。数値計算例は講演当日発表予定である。

〈参考文献〉(1) 金子・大塚；直線辺が弾性支持される扇形平板の解法、九大工集、第45巻第1号、S47.1.

(2) 金子・大塚；周辺が弾性支持される扇形平板の解法、土木学会西部支部昭和46年度論文概要集

(3) R.J. Roark; Formulas for Stress and Strain P174 McGraw 1954