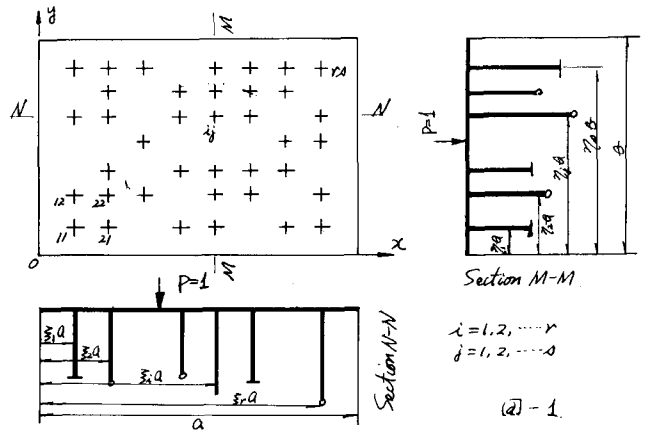


九大正会員の橋本武
清水建設 中村龍一

I 緒言. フラットスラブ構造の影響面解法に、差分法や有限要素法を直接適用する方法がある。また、著者の1人が先に提案した極限法による各種影響面の数式表手法もある。前者は、従来の構造形式および境界条件を有するフラットスラブ構造に適用できる点で極限の適用性に富むが、たとえば柱の位置や断面形状、長さを伴って構造形式が変るときに影響値算出のためのばう尺を繰返し及びまたはならぬことや、演算精度が高まることとが差程容易なものではないなどの難点がある。一方、後者は高精度な影響値を算定する上から好都合であるが、その適用範囲が少くともスラブの一端が単独支持されることや構造形式のフラットスラブ構造に限られるうらみがある。そこで、任意の境界条件および構造形式のフラットスラブ構造に対応し、演算労力が少くかつ精度の高い影響値を算出する方法として、新たに基本系法による解法を提案するものである。なお、算定に当り、荷重がスラブ面上を移動するものとして、柱軸線に沿う移動荷重は採用する。

II 不詳定力の影響面. 図-1に示すように、図面において任意の境界条件を有するスラブが、その中間において任意の配列および形状を有する柱の間に支えらるるものとす。このとき、(中間柱または中間支えより)スラブに伝えらるる垂直反力 V_{ij} 、および x, y 方向の反力モーメント M_{ij}^x, M_{ij}^y を求めるための基本連立方程式が次のように与えられる。



Section M-M
 $i=1, 2, \dots, r$
 $j=1, 2, \dots, s$
(a-1)

$$AX = B \quad (1)$$

$$A = \begin{bmatrix} \langle H_{ij}^{xx} \rangle & \langle H_{ij}^{xy} \rangle & \langle H_{ij}^{yy} \rangle \\ \langle O_{ij}^{xx} \rangle & \langle O_{ij}^{xy} \rangle & \langle O_{ij}^{yy} \rangle \\ \langle O_{ij}^{yx} \rangle & \langle O_{ij}^{xy} \rangle & \langle O_{ij}^{yy} \rangle \end{bmatrix}$$

$$X^T = \left[(V_{ij}) \quad \left(-\frac{1}{a} M_{ij}^x\right) \quad \left(-\frac{1}{b} M_{ij}^y\right) \right]$$

$$B = \begin{bmatrix} \left(\frac{ab}{4} L_{ij} - \frac{\mu D}{4a} d_{ij}\right) \\ \left(\frac{ab}{4} L_{ij} - \frac{\mu D}{4a} O_{ij}^x\right) \\ \left(\frac{ab}{4} L_{ij} - \frac{\mu D}{4a} O_{ij}^y\right) \end{bmatrix}$$

$\mu = b/a$ (四角比)
 D : 反側剛度

上式中、係数 $H_{ij}^{xx} \sim O_{ij}^{yy}$ は、フラットスラブ構造において中間柱、中間支えを取り除くことによる単純角形板(基本構)に、単位垂直力および x, y 方向の単位モーメントをそれぞれ作用させたときの、たわみおよび x, y 方向のたわみ角により定義されることを前提として示している。また、左辺の定数項 B において、 d_{ij}, O_{ij}^x および O_{ij}^y は中間柱 ij の頭部の垂直変位および x, y 方向の回転変位である。影響面の算定にあたり、支え次下は考慮しないから $d_{ij} = 0$ であり、また、 O_{ij}^x, O_{ij}^y は既知のたわみ角式から柱頭部の反力モーメント M_{ij}^x, M_{ij}^y との間には次に示すような関係式が成立する。

$$O_{ij}^x = -\tilde{r}_{ij}^x M_{ij}^x / a, \quad O_{ij}^y = -\tilde{r}_{ij}^y M_{ij}^y / b$$

次に、 B に含有される L_{ij} , L_{ij}^x , L_{ij}^y についても考へられる、これらは断面荷重である。すなわち、 L_{ij} は基本構に同じ荷重が作用するときの板工の突角のたわみ d_{ij} を D/a^2 倍したものである、 L_{ij}^x , L_{ij}^y は同じ突角の x , y 方向のたわみ角 θ_{ij}^x , θ_{ij}^y をそれぞれ D/a^2 , $M/D \cdot a^2$ 倍したものである。とすると、本題の断面状態は任意突に作用する単位集中荷重であるから、 d_{ij} , θ_{ij}^x , θ_{ij}^y はそれぞれ基本構の突 ij におけるたわみおよび x , y 方向のたわみ角に関する影響値であると解釈することはでき、これらは基本構に同じ有限要素法を適用した際の剛性マトリックスの逆マトリックスにおける当該行の諸値として求めらるゝものである。そこで、かゝる行マトリックスを d_{ij} , θ_{ij}^x , θ_{ij}^y のように記号表示するにしよう。

以上の諸内容を式(1)に代入して整理のうえ、不静定力 X を求める18次式がえられる。

$$X = \frac{M D}{4 a^2} \bar{A}^{-1} L \quad (2)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} ((H_{kkl}^{ii})) & ((H_{kkl}^{xi})) & ((H_{kkl}^{yi})) \\ ((O_{kkl}^{ii})) & ((O_{kkl}^{xi} + \tilde{P}_{ij}^x)) & ((O_{kkl}^{yi})) \\ ((\theta_{kkl}^{ii})) & ((\theta_{kkl}^{xi})) & ((\theta_{kkl}^{yi} + \tilde{P}_{ij}^y)) \end{bmatrix} \quad L^T = [d_{ij} \quad a\theta_{ij}^x \quad b\theta_{ij}^y]$$

$\tilde{P}_{ij}^x, \tilde{P}_{ij}^y$ は突角座標のみに含われる。

すなわち、式(2)が(1)周柱頭部に生ずる垂直反力 V_{ij} , 反力モーメント M_{ij}^x および M_{ij}^y の影響面式を得るので、基本構に関するたわみおよびたわみ角の影響値を明らかにすると同時に算出することも可能になる。

またたわみおよびたわみ角の影響面 任意突 (x, y) におけるたわみおよび x, y 方向のたわみ角 $\epsilon, \theta_x, \theta_y$ とすれば、これらは次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} w &= w_0 - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (V_{kcl} V_{kcl} - \frac{M_{kcl}^x}{a} w_{kcl}^x - \frac{M_{kcl}^y}{b} w_{kcl}^y) \\ \theta_x &= \theta_{x0} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (V_{kcl} \theta_{kcl}^x - \frac{M_{kcl}^x}{a} \theta_{kcl}^{xx} - \frac{M_{kcl}^y}{b} \theta_{kcl}^{xy}) \\ \theta_y &= \theta_{y0} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (V_{kcl} \theta_{kcl}^y - \frac{M_{kcl}^x}{a} \theta_{kcl}^{xy} - \frac{M_{kcl}^y}{b} \theta_{kcl}^{yy}) \end{aligned} \right\} (3)$$

> $w_0, \theta_{x0}, \theta_{y0}$: 基本構に荷重が作用したときの突 (x, y) のたわみおよび x, y 方向のたわみ角。

$w_{kcl}, \theta_{kcl}^x, \theta_{kcl}^y$: 基本構の突 kl に単位力 $V_{kcl} = -1$ が作用したときの突 (x, y) のたわみおよび x, y 方向のたわみ角
 $w_{kcl}^x, \theta_{kcl}^{xx}, \theta_{kcl}^{xy}$: 基本構の突 kl にモーメント $\frac{M_{kcl}^x}{a} = 1$ が作用したときの突 (x, y) のたわみおよび x, y 方向のたわみ角
 $w_{kcl}^y, \theta_{kcl}^{xy}, \theta_{kcl}^{yy}$: 基本構の突 kl にモーメント $\frac{M_{kcl}^y}{b} = 1$ が作用したときの突 (x, y) のたわみおよび x, y 方向のたわみ角
 影響面式算定に当って、式(3)における $w_0, \theta_{x0}, \theta_{y0}$ とは基本構の突 (x, y) における影響面を用いればよく、これを $w_0, \theta_{x0}, \theta_{y0}$ と記号表示する。このとき、式(3)と式(2)より、スラブ上の任意突 (x, y) におけるたわみおよび x, y 方向のたわみ角の影響面が次のように算定され、実際算定に当って用いるべきデータが基本構の影響値のたわみであることがわかる。

$$W = W_0 - \frac{M D}{4 a^2} W_{kcl}^T A^{-1} L \quad (4)$$

$$\begin{aligned} > W_{kcl} = \begin{bmatrix} (w_{kcl}) & (\theta_{kcl}^x) & (\theta_{kcl}^y) \\ (w_{kcl}^x) & (\theta_{kcl}^{xx}) & (\theta_{kcl}^{xy}) \\ (w_{kcl}^y) & (\theta_{kcl}^{xy}) & (\theta_{kcl}^{yy}) \end{bmatrix} & W^T = [w \quad \theta_x \quad \theta_y]^T \\ & W_0^T = [w_0 \quad \theta_{x0} \quad \theta_{y0}]^T \end{aligned}$$

IV. 断面力の影響面 フラットスラブ構造におけるスラブの断面力算定に必要となる諸量 $\chi_x = \partial^2 w / \partial x^2$, $\chi_y = \partial^2 w / \partial y^2$, $\chi_{xy} = \partial^2 w / \partial x \partial y$, $\psi_x = \partial^3 w / \partial x^3$, $\psi_y = \partial^3 w / \partial y^3$, $\psi_{xy} = \partial^3 w / \partial x^2 \partial y$, $\psi_{yx} = \partial^3 w / \partial x \partial y^2$ は次のように求めらる。

$$\left. \begin{aligned} \chi_x &= \chi_{x0} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (V_{kcl} \chi_{kcl}^x - \frac{M_{kcl}^x}{a} \chi_{kcl}^{xx} - \frac{M_{kcl}^y}{b} \chi_{kcl}^{xy}) \\ \chi_y &= \chi_{y0} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (V_{kcl} \chi_{kcl}^y - \frac{M_{kcl}^x}{a} \chi_{kcl}^{xy} - \frac{M_{kcl}^y}{b} \chi_{kcl}^{yy}) \\ \chi_{xy} &= \chi_{xy0} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (V_{kcl} \chi_{kcl}^{xy} - \frac{M_{kcl}^x}{a} \chi_{kcl}^{xyx} - \frac{M_{kcl}^y}{b} \chi_{kcl}^{xyy}) \end{aligned} \right\} > \chi_{x0} \sim \psi_{yx0}, \chi_{kcl}^x \sim \psi_{kcl}^{xyy} \text{ は同一断面の基本構に引荷重、単位力 } V_{kcl} = 1$$

$$\begin{aligned}
 \psi_x &= \psi_{x0} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\sqrt{a_k} \psi_{kx}^x - \frac{M_{kx}^x}{a} \psi_{kx}^{xx} - \frac{M_{kx}^y}{b} \psi_{kx}^{xy} \right) \\
 \psi_y &= \psi_{y0} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\sqrt{a_k} \psi_{ky}^y - \frac{M_{ky}^x}{a} \psi_{ky}^{yx} - \frac{M_{ky}^y}{b} \psi_{ky}^{yy} \right) \\
 \psi_{xy} &= \psi_{xy0} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\sqrt{a_k} \psi_{kxy}^{xy} - \frac{M_{kxy}^x}{a} \psi_{kxy}^{xxy} - \frac{M_{kxy}^y}{b} \psi_{kxy}^{xyy} \right) \\
 \psi_{yx} &= \psi_{yx0} - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\sqrt{a_k} \psi_{kyx}^{yx} - \frac{M_{kyx}^x}{a} \psi_{kyx}^{xxy} - \frac{M_{kyx}^y}{b} \psi_{kyx}^{xyy} \right)
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l}
 (5) \quad \text{モメント } M_{kx}^x/a=1, M_{kx}^y/b \\
 =1 \text{ が採用したときのスラブ} \\
 \text{に固有の曲率 } \sqrt{a_k} \text{ 等の} \\
 \text{諸量と定義するものがある。}
 \end{array} \right\}$$

一方、式(5)の諸量とスラブの断面力との関係が次のように与えられることは周知のとおりである。

$$\begin{aligned}
 M &= D \chi & (6) \quad \text{すなわち} & \quad D = \begin{bmatrix} D_x & 0 & 0 \\ 0 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} D_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H \end{bmatrix}, \quad M = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \chi = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix}, \quad Q = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix}, \quad \psi = \begin{Bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \\ \psi_{xy} \\ \psi_{yx} \end{Bmatrix} \\
 Q &= -E \psi & (7)
 \end{aligned}$$

式(6)における χ_{x0}, ψ_{y0} に関する諸量と同様の考慮を行って式(6), (7)に代入し、かつ式(2)を代入すれば、フラット・スラブ構造におけるスラブ上の任意点 (x, y) の x, y 方向の曲げモーメント、たわみモーメントおよび x, y 方向のせん断力の影響面式が導定されることになりである。

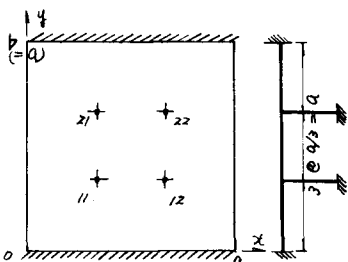
$$\begin{aligned}
 M &= D \{ \chi_0 - (MD/4a^2) \chi_{kx}^T A^{-1} U \}, \quad Q = -E \{ \psi_0 - (MD/4a^2) \psi_{ky}^T A^{-1} U \} & (8) \\
 \text{すなわち, } \chi_0^T &= [\chi_{x0} \quad \chi_{y0} \quad \chi_{xy0}] \quad \psi_0^T = [\psi_x \quad \psi_y \quad \psi_{xy} \quad \psi_{yx}]
 \end{aligned}$$

$$\chi_{kx} = \begin{bmatrix} (\chi_{kx}^x) & (\chi_{kx}^y) & (\chi_{kx}^{xy}) \\ (\chi_{kx}^{yx}) & (\chi_{kx}^x) & (\chi_{kx}^{xy}) \\ (\chi_{kx}^{xy}) & (\chi_{kx}^y) & (\chi_{kx}^{yy}) \end{bmatrix}, \quad \psi_{ky} = \begin{bmatrix} (\psi_{ky}^x) & (\psi_{ky}^y) & (\psi_{ky}^{xy}) & (\psi_{ky}^{yx}) \\ (\psi_{ky}^{yx}) & (\psi_{ky}^x) & (\psi_{ky}^{xy}) & (\psi_{ky}^{yy}) \\ (\psi_{ky}^{xy}) & (\psi_{ky}^y) & (\psi_{ky}^{yy}) & (\psi_{ky}^{yx}) \end{bmatrix}$$

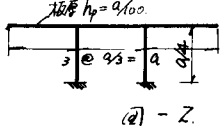
V. 柱の変形量および断面力の影響面 本論文ではスラブ面上の柱移動変位を考慮するから、中間柱の任意断面におけるたわみ、たわみ角、曲げモーメントおよびせん断力は、11本の柱頭部における反力モーメント M_{11}^x, M_{11}^y の一次結合式で与えられる。したがって、これらの諸量の影響面は11本の M_{11}^x, M_{11}^y の影響面に適当な係数をかけるのと同じ直ちに算定されることになる。

計算算例

図-2に示すように、1辺が固定され、他3辺が自由である正方形スラブが、25に

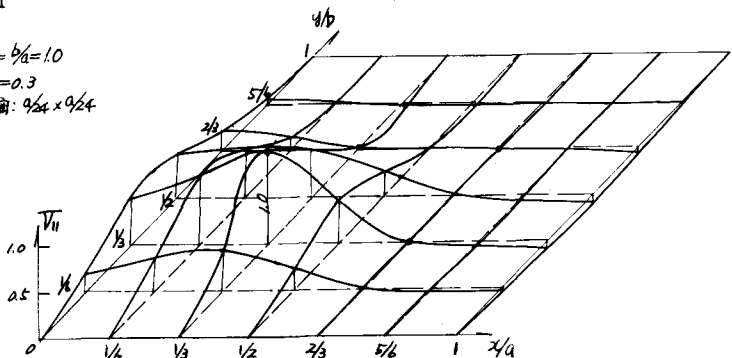


中間における2柱11, 12, 21, 22 (11本の $9/24 \times 9/24$ a 正方形断面とす)で支えられるフラット・スラブ構造に關して、柱11の垂直反力 V_{11} , xおよびy方向の反力モーメント M_{11}^x, M_{11}^y の影響面を算定したのでプロットする(図-3, 4, 5に示す)ことになりである。



$\mu = b/a = 1.0$
 $\nu = 0.3$
 柱断面: $9/24 \times 9/24$

図-3
 V_{11} -influence surface.



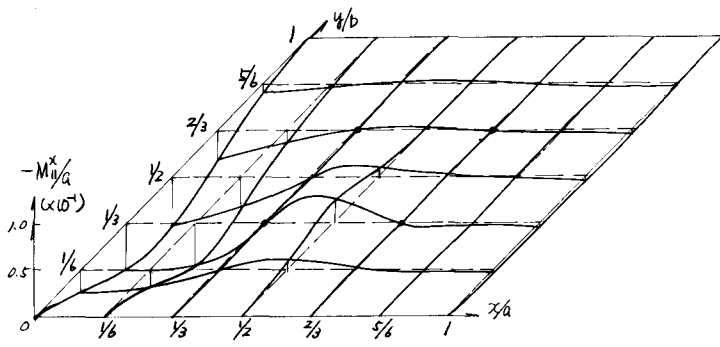
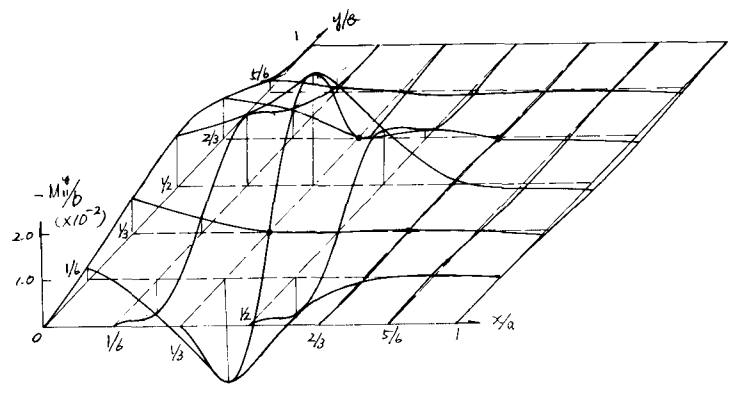


図-4
 M_a^0/a -influence surface.

図-5
 M_b^0/a -influence surface.



要約 本法によるフラットスラブの影響面解法は、基本構に関する剛性マトリックスの逆マトリックス算定が最大の計算労力を要するところであり、他のマトリックス演算は差に乏しき労力を要し得た。したがって、上述の逆マトリックスを之と見なせば、たとえその位置が変る場合や、その断面形状や長さも変化する場合、柱の本数が増減する場合などの構造形式が変るに直ちに式(2)、(4)、(8)から新しい構造形式のフラットスラブに関する各諸量の影響値を簡単に求めることが可能となり、有限要素法と直接適用して逐次解ける場合：比較して著るしく計算労力が軽減されることとなる。また、これまで著者の研究から、曲げの問題に就いて基本系法が直接有限要素法に特長のある点と勝り得ることを明らかにした。このことより類推すれば、柱交の点に於ける本影響面解法が極めて有利であると思われるであろう。なお、このことについては実験研究とも合せ、今後且仔細に研究を進めたいと思ふ。

本研究は文部省科学研究費の補助を受けた。記して謝意を表す。

参考文献

(1) R.E. Wooding & C.P. Siess: Influences for Continuous Plates, Proc. ASCE, vol. 94, ST. 1, Jan. 1968
 (2) T. Chisgaki: Analysis of Influence Surfaces of Flat Slab Supported by Flexural Columns, Proc. of the 20th Jap. Nat. Cong. for Appl. Mech., 1970.
 (3) 橋本武: 梁板構造の解法に関する研究(予位論文)