I-118

上下床板と縦横リブによるサンドイッチプレートの解析

室蘭工業大学 正員 工博 能町純雄
北見工業大学 正員 工修 大島俊之○

1 まえがき

本論文は薄肉平板によって格子状に直交させて組み合わせてつくった縦横のリブを、上下二板の薄肉平板ではさんだような構造を取扱っている。

この種の立体構造物は有限要素法などで解く場合には非常に多くの労力を必要とするが、ここで述べるような解析方法を用いることによって、少ない計算時間で精度よい近似解を求めることができ、非常に有効であると思われる。

解析に当たっては構造を各平面折板要素に分解する。そして一つの要素についての関係式は先に著者らが発表している変位剪断公式（Displacement-Shear-Equation）を用いる。そして各構造要素の接合線にそって剪断力のつりあいを考え、変位で表わされた二階常微分方程式を誘導する。即ち、各構造要素は滑節結合されていると近似的に考え、ある一つの区画線について任意の点でつりあいが連続しているとする。また接合線に作用する垂直力については、接合線の交点で、前後のStress、Displacementが相等しいということから式を導いている。即ち、薄板そのものは面内の変形に対する抵抗はあるが、面外変形には膜のように抵抗しないものと考えている。

得られた基本微分方程式はいままで何度か発表しているように[1,2]リブの交点における応力と変位の連続条件を用いながら積分し、適合条件を用いて精度のよい基本差分方程式に変換する。即ち、一般の数学的差分化とちがって、力学的な適合条件を考慮しながら積分しているので、本法は力学的差分法ともいうべき手法である。またこのような手順が正当なものであるか否かは、区間長を無限に短かくして、基本微分方程式に一致するか否かで検証する。

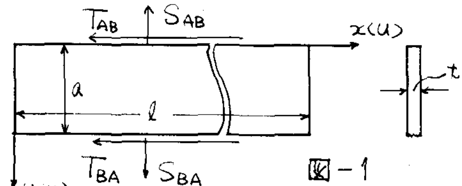
本論の解析方法を応用することによって、箱桁の場合、ダイヤフラムによる分割長と断面長辺長の比が5以下の場合には、ヒンジ結合構造の計算値で十分なことが判かっているので、多室箱桁のダイヤフラムの解析に応用することができる。

2、折板要素に関する関係式

図のような折板要素について以下のような関係式が成立する。ただし、ポアソン比 $\nu=0$

$N=Eta$, $\dot{u}=\dfrac{\partial u}{\partial x}$ を示す。

$$Gta(\dot{v}_A+\dot{v}_B)=Gt(u_A-u_B)+(\bar{S}_{AB}-\bar{S}_{BA}) \quad \text{—(1)}$$



図−1

$$T_{AB}(x)=\frac{N}{6}(2\ddot{u}_A+\ddot{u}_B)+\frac{Gt}{2}(\dot{v}_A+\dot{v}_B)+\frac{Gt}{a}(u_B-u_A) \quad \text{—(2)}$$

$$T_{BA}(x)=\frac{N}{6}(2\ddot{u}_B+\ddot{u}_A)-\frac{Gt}{2}(\dot{v}_A+\dot{v}_B)-\frac{Gt}{a}(u_B-u_A) \quad \text{—(3)}$$

3. フーリエ定和分変換公式とその反転公式[3)]

差分式のように離散量で定義した力学的場において、次のような関係式が成立する。

$$\mathbb{S}_i[f(x)] = \sum_{x=1}^{n-1} f(x)\sin\frac{i\pi}{n}x \quad —(4) \quad \longrightarrow \quad f(x)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{S}_i[f(x)]\sin\frac{i\pi}{n}x \quad —(5)$$

$$\mathbb{C}_i[f(x)]=\sum_{x=1}^{n-1} f(x)\cos\frac{i\pi}{n}x \quad —(6) \qquad \mathbb{R}_i[f(x)]=\mathbb{C}_i[f(x)]+\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}(-1)^i f(n) \quad —(7)$$

とすれば

反転公式は $f(x)=\frac{1}{n}\mathbb{R}_0[f(x)]+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{R}_i[f(x)]\cos\frac{i\pi}{n}x+\frac{1}{n}(-1)^x\mathbb{R}_n[f(x)]$ —(8)

また

$$\mathbb{S}_i[\Delta^2 f(x-1)] = -\sin\frac{i\pi}{n}\{(-1)^i f(n)-f(0)\} - D_i\mathbb{S}_i[f(x)] \quad —(9)$$

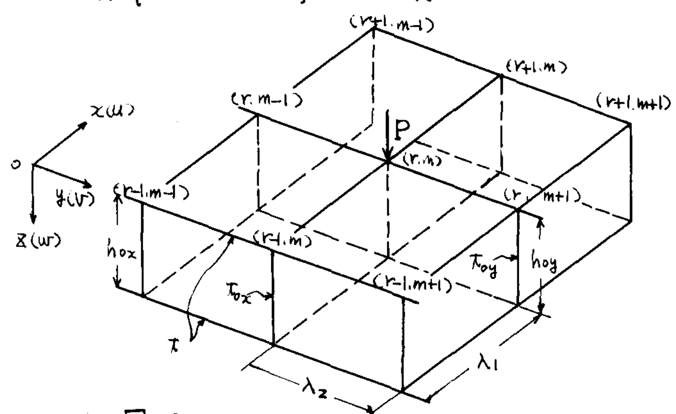
$$\mathbb{S}_i[\Delta f(x-1)] = -2\sin\frac{i\pi}{n}\mathbb{R}_i[f(x)] \quad —(10) \qquad \text{ただし}\ D_i=2\left(1-\cos\frac{i\pi}{n}\right)$$

$$\mathbb{C}_i[\Delta^2 f(x-1)]=(-1)^i\Delta f(n-1)-\Delta f(0)-D_i\mathbb{R}_i[f(x)] \quad —(11)$$

$$\mathbb{C}_i[\Delta f(x-1)] = -(-1)^i\Delta f(n-1)-\Delta f(0)+\left(1+\cos\frac{i\pi}{n}\right)\{(-1)^i f(n)-f(0)\}+2\sin\frac{i\pi}{n}\mathbb{S}_i[f(x)] \quad —(12)$$

4. 基本式の誘導、

図のような構造において、折板構造要素のx、y、zの3方向の交線にそって剪断力のつりあい式をたて、3本の基本式を得る。その際、簡単のため、構造、変形状態とも、板の上下で中立面に対し逆対称であると仮定して、次のようにおく。



$U^o=-U^z,\quad V^o=-V^z,\quad W^o=W^z$ —(13) 図-2

まず、図のx方向の交線($y=m$)にそって、区間rとr+1の間において

$$T_{m,m+1}(x)+T_{m,m-1}(x)+T_m^{oz}(x)=0 \quad —(14)$$

このTに(2),(3)式で記号を上図に従っておきかえた式を代入し、整理すると、

$$\left(\frac{2}{3}N_x+\frac{N_{ox}}{6}\right)\ddot{U}_m+\frac{N_x}{6}(\ddot{U}_{m+1}+\ddot{U}_{m-1})-2G\left(\frac{t}{\lambda_2}+\frac{t_{ox}}{h_{ox}}\right)U_m+\frac{Gt}{\lambda_2}(U_{m+1}+U_{m-1})$$
$$+\frac{Gt}{2}(\dot{V}_{m+1}-\dot{V}_{m-1})+Gt_{ox}\dot{W}_m=0 \quad —(15)$$

ここで文献[1)]を参照して上式を差分式に変換することを考える。まず式を判かりやすくするため

$$K\ddot{U}+G_1U+G_2\dot{V}=0 \quad —(16)$$

ただし $K=\left(\frac{2}{3}N_x+\frac{N_{ox}}{6}\right)$ etc, $G_1=-2G\left(\frac{t}{\lambda_2}+\frac{t_{ox}}{h_{ox}}\right)$ etc, $G_2=\frac{Gt}{2}$ etc.

とおくと、(16)式は積分されて

$$\frac{K}{\lambda}\Delta_r^2U_{r-1}+\frac{\lambda}{6}G_1(\Delta_r^2U_{r-1}+6U_r)+\frac{1}{2}G_2\Delta_rV_{r-1}=0 \quad —(17)$$

となる。ただし、 $\Delta_r^2 f(x-1)=f(x+1)-2f(x)+f(x-1)$

$\Delta_r f(x-1)=f(x+1)-f(x-1)$

以上より基本式(15)は次のような差分方程式となる。

$$\left(\frac{N_x}{6\lambda_1}+\frac{Gt\lambda_1}{6\lambda_2}\right)\Delta_r^2\Delta_m^2 U_{r-1,m-1}+\left(\frac{N_x}{\lambda_1}+\frac{N_{ox}}{6\lambda_1}-\frac{Gt_{ox}\lambda_1}{3h_{ox}}\right)\Delta_r^2 U_{r-1,m}+\frac{Gt\lambda_1}{\lambda_2}\Delta_m^2 U_{r,m-1}-2\frac{Gt_{ox}\lambda_1}{h_{ox}}U_{r,m}$$
$$+\frac{Gt}{4}\Delta_r\Delta_m V_{r-1,m-1}+\frac{Gt_{ox}}{2}\Delta_r W_{r-1,m}=0 \qquad \text{—(18)}$$

ただし $N_x=Et\lambda_2$, $N_{ox}=Et_{ox}h_{ox}$, これとConjugateなy方向についても

$$\left(\frac{N_y}{6\lambda_2}+\frac{Gt\lambda_2}{6\lambda_1}\right)\Delta_r^2\Delta_m^2 V_{r-1,m-1}+\left(\frac{N_y}{\lambda_2}+\frac{N_{oy}}{6\lambda_2}-\frac{Gt_{oy}\lambda_2}{3h_{oy}}\right)\Delta_m^2 V_{r,m-1}+\frac{Gt\lambda_2}{\lambda_1}\Delta_r^2 V_{r-1,m}-2\frac{Gt_{oy}\lambda_2}{h_{oy}}V_{r,m}$$
$$+\frac{Gt}{4}\Delta_r\Delta_m U_{r-1,m-1}+\frac{Gt_{oy}}{2}\Delta_m W_{r,m-1}=0 \qquad \text{—(19)}$$

z方向については、4枚のリブが交差しているので4つのz方向の剪断力のつりあい式をとって、

$$\frac{Gt_{ox}h_{ox}}{\lambda_1}\Delta_r^2 W_{r-1,m}+\frac{Gt_{oy}h_{oy}}{\lambda_2}\Delta_m^2 W_{r,m-1}-Gt_{ox}\Delta_r U_{r-1,m}-Gt_{oy}\Delta_m V_{r,m-1}$$
$$=\frac{2}{\lambda_1}\left\{\bar{\bar{P}}\binom{r,r+1}{m}\Big|_0^{\lambda_1}-\bar{\bar{P}}\binom{r,r-1}{m}\Big|_0^{\lambda_1}\right\}+\frac{2}{\lambda_2}\left\{\bar{\bar{P}}\binom{r}{m,m+1}\Big|_0^{\lambda_2}-\bar{\bar{P}}\binom{r}{m,m-1}\Big|_0^{\lambda_2}\right\}-P_{r,m} \qquad \text{—(20)}$$

ただし、pはリブの上に載荷する分布荷重、Pは集中荷重。

以上の(18)(19)(20)式が基本差分方程式であり、(10)~(12)のフーリエ定和分変換を行なって

$$\tilde{U}=R_m S_i[U(x,y)],\quad \tilde{V}=S_m R_i[V(x,y)],\quad \tilde{W}=S_m S_i[W(x,y)] \qquad \text{—(21)}$$

とおいてマトリックス表示すると、

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{U}\\ \tilde{W}\\ \tilde{V}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{P}_1\\ \tilde{P}_2\\ \tilde{P}_3\end{bmatrix} \qquad \text{—(22)}$$

ただし $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3$ は境界値を含む荷重項。$D_m=2\left(1-\cos\frac{m\pi}{n}\right)$, $D_i=2\left(1-\cos\frac{i\pi}{k}\right)$

$$a_{11}=\frac{1}{6}\left(\frac{N_x}{\lambda_1}+\frac{Gt\lambda_1}{\lambda_2}\right)D_iD_m-\left(\frac{N_x}{\lambda_1}+\frac{N_{ox}}{6\lambda_1}-\frac{Gt_{ox}\lambda_1}{3h_{ox}}\right)D_m-\frac{Gt\lambda_1}{\lambda_2}D_i-2\frac{Gt_{ox}\lambda_1}{h_{ox}}$$

$a_{12}=Gt_{ox}\sin\frac{m\pi}{n}$, $a_{13}=Gt\sin\frac{m\pi}{n}\sin\frac{i\pi}{k}$, $a_{21}=2a_{12}$, $a_{22}=-G\left(\frac{t_{ox}h_{ox}}{\lambda_1}D_m+\frac{t_{oy}h_{oy}}{\lambda_2}D_i\right)$

$a_{23}=2Gt_{oy}\sin\frac{i\pi}{k}$, $a_{31}=a_{13}$, $2a_{32}=a_{23}$

$$a_{33}=\frac{1}{6}\left(\frac{N_y}{\lambda_2}+\frac{Gt\lambda_2}{\lambda_1}\right)D_iD_m-\left(\frac{N_y}{\lambda_2}+\frac{N_{oy}}{6\lambda_2}-\frac{Gt_{oy}\lambda_2}{3h_{oy}}\right)D_i-\frac{Gt\lambda_2}{\lambda_1}D_m-2\frac{Gt_{oy}\lambda_2}{h_{oy}}$$

5. 微分方程式への収束

(22)式について区画長λ_1, λ_2を無限小としたとき、いかなる微分方程式に収束するか検討する。

$$\det|a|\cdot\tilde{W}=(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})\tilde{P}_2 \qquad \text{—(23)}$$

ここで分割を無限小にし、n, kを無限大にすると近似的に $l_x=n\lambda_1$, $l_y=k\lambda_2$

$$D_i\fallingdotseq\left(\frac{i\pi}{k}\right)^2-\frac{1}{12}\left(\frac{i\pi}{k}\right)^4,\quad \sin\frac{i\pi}{k}\fallingdotseq\left(\frac{i\pi}{k}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{i\pi}{k}\right)^3 \quad (mについても同様)$$

となるので、これを(23)式に代入し、$\det|a|$を計算し、高次の項を省略し、整理する。

$$\det|a|\fallingdotseq\left[\frac{2t_1}{t}\left\{a_y\left(2+\frac{t_1}{3t}\right)+a_x\right\}-2\frac{t_{ox}^2}{t^2\lambda_2^2}\right]D_x^4+\left[\frac{1}{t}\left\{2a_yt_1+2a_xt_1\left(2+\frac{t_2}{3t}\right)+2a_yt_2\left(2+\frac{t_1}{3t}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+2a_xt_2\right\}-2\frac{t_{ox}^2}{t^2\lambda_2^2}\left(2+\frac{t_2}{3t}\right)-2\frac{t_{oy}^2}{t^2\lambda_1^2}\left(2+\frac{t_1}{3t}\right)\right]D_x^2D_y^2+4\left\{\frac{t_2}{t}a_xa_y-a_x\frac{t_{oy}^2}{t^2\lambda_1^2}\right\}D_y^2$$
$$+\left[\frac{2t_2}{t}\left\{a_x\left(2+\frac{t_2}{3t}\right)+a_y\right\}-2\frac{t_{oy}^2}{t^2\lambda_1^2}\right]D_y^4+4\left\{\frac{t_1}{t}a_xa_y-a_y\frac{t_{ox}^2}{t^2\lambda_2^2}\right\}D_x^2 \qquad \text{—(24)}$$

ただし $t_1=\frac{t_{ox}h_{ox}}{\lambda_2}$, $t_2=\frac{t_{oy}h_{oy}}{\lambda_1}$, $a_x=\frac{t_{ox}}{h_{ox}t\lambda_2}$, $a_y=\frac{t_{oy}}{h_{oy}t\lambda_1}$, $D_x=\left(\frac{m\pi}{l_x}\right)$, $D_y=\left(\frac{i\pi}{l_y}\right)$

一方(23)式の右辺は、分割を極限にした時に残る定数項として

$$\frac{(a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13})}{Gt\lambda_1\lambda_2}\tilde{P}_2=\frac{4t_{ox}t_{oy}}{Gt^3h_{ox}h_{oy}\lambda_1^2\lambda_2^2}\tilde{P}_2\fallingdotseq\frac{4t_{ox}t_{oy}}{Gt^3h_{ox}h_{oy}\lambda_1\lambda_2}\cdot q \qquad \text{—(25)}$$

さて、D_x^2、D_y^2の係数は、t_1, t_2, a_x, a_yの値を代入して変形するといずれも零となる。また、D_x^4の係数を(25)式のqの係数で割り、B_xとすると

$$B_x = G t h_{ox}^2 + \frac{G t_{ox} h_{ox}^3}{6\lambda_2} \fallingdotseq E\left(\frac{1}{2} t h_{ox}^2 + \frac{t_{ox} h_{ox}^3}{12\lambda_2}\right) \qquad \text{―(26)}$$

となり、これは中立軸に関する、リブと上下二枚のフランジの断面二次モーメントをλ_2で平均化した値と同義であり、B_yについても同様である。又、B_{xy}については、$B_{xy} = G t (h_{ox}^2 + h_{oy}^2)$となる。

以上より、高次の項を省略すると区画長を無限小にするとサンドイッチプレートの基本式は

$$B_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + B_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \qquad \text{―(27)}$$

となり、直交異方性板の微分方程式に一致することがわかる。

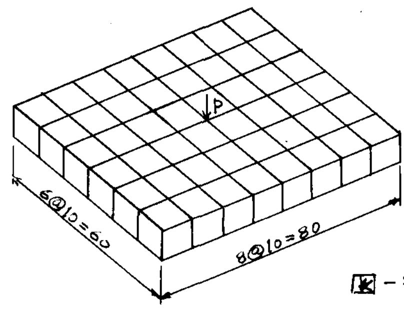
6 数値計算例

図のような断面諸元を代入して周辺単純支持のサンドイッチ板の各点に図のような集中荷重Pが作用した時の各点のu、v、w、σ_x、σ_yを求め、影響線を書いた。

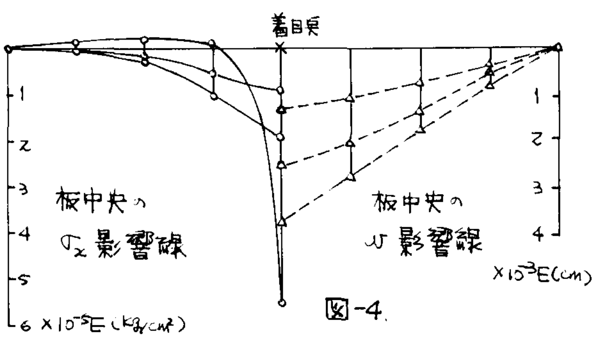
$E = 34800\ \mathrm{kg/cm^2}$, $G = 12610\ \mathrm{kg/cm^2}$

$t = 0.3\ \mathrm{cm}$　$t_{ox} = t_{oy} = 0.5\ \mathrm{cm}$, $h_{ox} = h_{oy} = 6\ \mathrm{cm}$

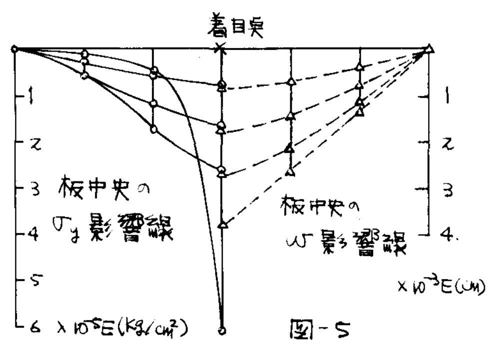
$\lambda_1 = \lambda_2 = 10\ \mathrm{cm}$.



図－3



図－4



図－5

以上は周辺単純支持サンドイッチプレートの計算であるが、直交するリブをダイヤフラムと考えると、荷重点のとなりの応力σ_x、σ_yの値が急激に減少していることから見て、ダイヤフラムの効果と考えることができ、その方面に応用可能なことを示唆している。

7. 結言

以上、サンドイッチプレートについて理論式を折板理論から誘導し、数値計算によって応力、変位の影響線を求め、その構造特性を調べた。また区画長を無限小にして、基本微分方程式を求めた所、直交異方性板の微分方程式になることが判かり、理論式を検討することができた。今後はダイヤフラムのある多室箱桁の計算、各種境界条件の場合の計算などに発展させていきたいと思っている。

参考文献

1) 能町・松岡・大島；マトリックス構造解析法研究発表会論文集、第5回（昭和46年6月）

2) 能町・尾崎・大島；土木学会第26回年次学術講演会講演集、第1部、p505（昭和46年10月）

3) Nomachi, Matsuoka: Applications of Finite Fourier Integration Transforms for Structural Mechanics, Proc. of the 20th Jap. Nat. Cong. for Appl. Mech (1970)