I-117　粘弾性材料における緩和関数の決定について

秋田大学　正会員　○色部　誠
同　上　同　上　赤木　知之

1. まえがき　有限要素法による粘弾性構造解析は何人かの研究者によって試みられているが，山田・岩田[1]，赤木・色部[2]らは増分形の応力・ひずみ関係式を求め，増分理論による解式を与えている。応力・ひずみ増分関係式を文献1)では一般化Voigtモデルについてクリープコンプライアンスから求めており，文献2)では一般化Maxwellモデルについて緩和関数から求めている。そのため，まず，前者では，

$$\Delta\varepsilon(t)=J\left\{\Delta\sigma(t)-\Delta I\right\} \tag{1}$$

後者では，

$$\Delta\sigma(t)=G\left\{\Delta\varepsilon(t)-\Delta I'\right\} \tag{2}$$

の形の関係式が得られる。よって，第一の方法による場合，Dーマトリックスをつくるために(1)式を反転せねばならないが，第二の方法によるならば，ただちにDーマトリックスが定まる。

材料実験の側面から見るならば，クリープ積分法則

$$\begin{aligned}\varepsilon(t)&=\int_{-\infty}^{t}J(t-\tau)\frac{\partial\sigma(\tau)}{\partial\tau}\,d\tau\\&=J(0)\cdot\sigma(t)+\int_{0}^{t}\frac{\partial J(t-\tau)}{\partial(t-\tau)}\cdot\sigma(\tau)\,d\tau\qquad(t<0\ \text{で}\ \varepsilon=\sigma=0)\end{aligned} \tag{3}$$

におけるJ(t)がクリープコンプライアンスであって，式の形から，$\sigma(\tau)=Const.$　とする定応力クリープ試験からJ(t)を定めることは易しい。同様に，緩和積分法則

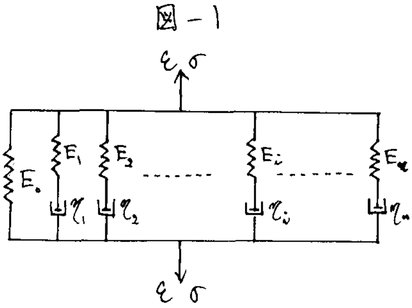
$$\sigma(t)=\int_{-\infty}^{t}G(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon(\tau)}{\partial\tau}\,d\tau=G(0)\cdot\varepsilon(t)+\int_{0}^{t}\frac{\partial G(t-\tau)}{\partial(t-\tau)}\,\varepsilon(\tau)\,d\tau \tag{4}$$

におけるG(t)が緩和関数であって，定ひずみのもとでの応力緩和試験が行なえれば，G(t)を容易に決定できるが，このような緩和試験そのものがむずかしい。

以上の所論から，Dーマトリックスをつくる段階では，第一の方法に比べて第二の方法に便宜さが認められるが，材料定数決定の困難さから，一見，第二の方法は実用的でないように思われる。

本報告は，通常のクリープ試験によって，一般化Maxwellモデルの緩和関数に含まれる材料定数をきめ得ることを示し，粘弾性構造解析にMaxwellモデルを用いることの支障を除こうとするものである。

図－1



2. 方法．図－1に一般化Maxwellモデルを示す。
i分岐については，$E_i/\eta_i=T_i$　とおけば，

$$\left(\frac{d}{dt}+\frac{1}{T_i}\right)\sigma_i=E_i\frac{d\varepsilon}{dt} \tag{5}$$

であり，$\sum_{i=0}^{n}\sigma_i=\sigma$　であるから，図により，つぎの応力・ひずみの微分方程式を得る。

$$P(D)\cdot\sigma(t) = Q(D)\cdot\varepsilon(t) \tag{6}$$

ただし、Dは微分演算子 $D=d/dt$ であり、$P(D)$, $Q(D)$ はDに関する多項式であり、ともにn次式となることは、図および(5)式から明らかであり、示せば、つぎのとおりである。

$$P(D)=\sum_{i=0}^{n} a_i D^i \;;\quad a_0=1,\quad a_1=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{T_i},\quad a_2=\frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{n}\frac{1}{T_i}\cdot\frac{1}{T_j}\quad(i\neq j),\cdots \tag{7}$$

$$Q(D)=\sum_{i=0}^{n} b_i D^i \;;\quad b_0=\sum_{i=0}^{n} E_i,\quad b_1=\Big(\sum_{i=0}^{n} E_i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{T_i}\Big)-\sum_{i=0}^{n}\frac{E_i}{T_i},\quad\cdots\cdots \tag{8}$$

(6)式のLaplace変換をつくれば、

$$\bar{P}(s)\cdot\bar{\sigma}-\sum_{i=0}^{n} a_i\left\{s^{i-1}\sigma(0)+s^{i-2}\frac{d\sigma(0)}{dt}+\cdots\cdots+\frac{d^{i-1}\sigma(0)}{dt^{i-1}}\right\}$$
$$=\bar{Q}(s)\cdot\bar{\varepsilon}-\sum_{i=0}^{n} b_i\left\{s^{i-1}\varepsilon(0)+s^{i-2}\frac{d\varepsilon(0)}{dt}+\cdots\cdots+\frac{d^{i-1}\varepsilon(0)}{dt^{i-1}}\right\} \tag{9}$$

ただし

$\bar{P}(s)=\sum_{i=0}^{n} a_i s^i$, $\bar{Q}(s)=\sum_{i=0}^{n} b_i s^i$ である。

初期条件として、

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\left\{s^{i-1}\sigma(0)+s^{i-2}\frac{d\sigma(0)}{dt}+\cdots\cdots+\frac{d^{i-1}\sigma(0)}{dt^{i-1}}\right\}=\sum_{i=0}^{n} b_i\left\{s^{i-1}\varepsilon(0)+s^{i-2}\frac{d\varepsilon(0)}{dt}+\cdots\frac{d^{i-1}\varepsilon(0)}{dt^{i-1}}\right\} \tag{10}$$

が成立すれば、(9)式より、

$$\bar{\sigma}=\frac{\bar{Q}(s)}{\bar{P}(s)}\bar{\varepsilon}\qquad \text{または、}\qquad \bar{\varepsilon}=\frac{\bar{P}(s)}{\bar{Q}(s)}\cdot\bar{\sigma} \tag{11}$$

を得る。 $\bar{P}(s)$, $\bar{Q}(s)$ がともにsのn次の多項式であることから、$\bar{Q}(s)/\bar{P}(s)$ にしても、$\bar{P}(s)/\bar{Q}(s)$ にしても、定数項と部分分数 $d_j/s-\lambda_j$ に分解でき、これらの逆変換が定まる。したがって、一般化Maxwell モデルに対しては、(11)の第一式を逆変換して(4)式すなわち緩和形の応力・ひずみ関係式を得ることも、また(11)の第2式の逆変換から(3)式の形のクリープ形応力・ひずみ関係式を得ることもできる。

よって、まず、(11)第2式を逆変換してクリープコンプライアンスの形を求め、クリープ実験の結果と比較し(たとえば選点法により)、$E_0, E_1, \cdots, T_1, T_2 \cdots\cdots$ の値を定める。これらを(11)第1式の逆変換により得られる緩和関数に入れれば、$G(t)$ が定まる。

3. あとがき これまで、単に応力・ひずみと表現してきたが、厳密に表現するならば、主応力、主ひずみおよび偏差応力、偏差ひずみが用いられるべきである。そして、クリープコンプライアンスにしろ緩和関数にしろ体積成分とせん断成分(偏差成分)とは異なる。これは弾性定数におけるKとGの違いと同様である。よって、粘弾性定数を明らかにするうえで、少くとも、一軸試験と二軸試験とを同時に行なう必要があることを強調しておきたい。

1) 山田嘉昭、岩田耕司"熱粘弾性問題の有限要素法解析" JSSC第5回大会、マトリックス構造解析法研究発表論文集、46.6.2

2) 赤木知之、色部 誠、"プレストレストコンクリート構造物の粘弾性解析"、土木学会第27回年次学術講演会.