I-116　プレストレスト コンクリート構造物の粘弾性解析

秋田大学　正員　○赤木知之
秋田大学　正員　色部　誠

1. 緒　言

粘弾性理論の研究はMaxwell[1867]がピッチやガラスの挙動を観察したのが始めで，その現象をバネとダッシュポットを使った力学モデルであらわした。更に，Meyer[1874], Boltzmann[1874], Voigt[1889], Kelvin[1875]等も，同様のあらわし方を試みているが，構造解析までは応用されず，そのまま近年に到っている。ところが，最近のめざましい工業技術の進歩に伴い，高分子材料の開発が進んだこと，及び固体ロケット推進薬が顕著な粘弾性的挙動を示すことから，この方面の研究要求が高まって，再び多くの研究者の興味を引くこととなり，かつ電子計算機のめざましい発達に伴なった有限要素法の開発は，過去において解析不可能と考えられていた高次不静定構造物の材料非線形問題に，輝やかしい希望をもたらした。筆者等は，昨年来，これら最新の線形粘弾性理論を，塑性解析に用いられる増分理論と有限要素法に適用して，コンクリート構造物の粘弾性解析に，その定式化を試みてきたが，ここにその概要を報告するものである。特に，最近巨大化をたどる原子力発電の原子炉格納容器に，プレストレストコンクリートが使われるようになり，そのクリープによる緊張力緩和の解析を研究の対象とした。

2. 理論および基本式

線形粘弾性材料の応力ーひずみ関係式は，緩和関数をE(t)とすれば，次の記憶積分であらわされる。

$$\sigma(t)=\int_{-\infty}^{t}E(t-\tau)\frac{d\varepsilon}{d\tau}d\tau = \varepsilon(t)E(0)+\int_{0}^{t}\varepsilon(\tau)\frac{dE(t-\tau)}{d(t-\tau)}d\tau \qquad (1)$$

更に，多軸応力状態の応力ーひずみ関係式に拡張すれば，Hook則の一般化と同様の手法で，K(t), G(t)をそれぞれ体積緩和関数，せん断緩和関数として，次式であらわせる。

$$\sigma_{ij}(t)=\delta_{ij}\left[K(0)\varepsilon_{rr}(t)+\int_{0}^{t}\varepsilon_{rr}(\tau)\frac{dK(t-\tau)}{d(t-\tau)}d\tau\right]+2G(0)\varepsilon'_{ij}(t)+2\int_{0}^{t}\varepsilon'_{ij}(t)\frac{dG(t-\tau)}{d(t-\tau)}d\tau \qquad (2)$$

ここで，δ_{ij}は単位テンソル，σ_{ij}，ε_{ij} は物体内のある位置における応力およびひずみテンソル．ε'_{ij} は次式で定義される偏差ひずみである。

$$\varepsilon'_{ij}=\varepsilon_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{rr} \qquad (3)$$

又，K(t)，G(t) 等の記憶関数特性は，熱力学における fading memory の公理より，非常に限定された形を持ち，減衰指数型であらわすのが最も一般的である。つまり，Prony 級数を用いて，

$$K(t)=\sum_{\alpha=0}^{n}K_\alpha e^{-k_\alpha t}\quad,\quad G(t)=\sum_{\alpha=0}^{n}G_\alpha e^{-g_\alpha t}\qquad k_\alpha,\ g_\alpha>0 \tag{4}$$

とあらわす。 $K_\alpha, G_\alpha, k_\alpha, g_\alpha, n$ は近似の度合に応じて実験値に合うように選ばれる。又、(4)式は、一般化Maxwellモデルの数学的表示[1]と対応しており、このモデルの諸定数を(4)式に用いて、(2)式に代入すれば、応力－ひずみ関係の陽な表示式を得ることができる。

結局、弾性問題におけるHook則にかわって、(2)式を用いれば粘弾性問題としての解は決まる。しかし、(2)式は記憶積分の形故、任意時刻の応答を評価するのに、それ以前の応答の記憶つまり $t=0$ にさかのぼった積分が、行なわれなければならず、そのための記憶容量、計算時間は莫大なものとなる。そこで、ここに増分理論を適用すれば、時刻 t の応答は $t-\Delta t$ の応答のみを記憶して求めることが可能となる。つまり、(2)式に部分積分を施こして、得られるひずみ速度を微少時間増分 Δt のあいだ一定と仮定すれば、すなわち

$$\frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}=\frac{\Delta\varepsilon(t)}{\Delta t}\qquad t-\Delta t<\tau<t \tag{5}$$

増分形応力－ひずみ関係式として、次式を得る。[2)]

$$\begin{Bmatrix}\Delta\sigma_{11}\\\Delta\sigma_{22}\\\Delta\sigma_{33}\\\Delta\sigma_{23}\\\Delta\sigma_{31}\\\Delta\sigma_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}K_v+\frac{4}{3}G_v & & & & & \text{SYM}\\ K_v-\frac{2}{3}G_v & K_v+\frac{4}{3}G_v & & & & \\ K_v-\frac{2}{3}G_v & K_v-\frac{2}{3}G_v & K_v+\frac{4}{3}G_v & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2G_v & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_v & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_v\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta\varepsilon_{11}\\\Delta\varepsilon_{22}\\\Delta\varepsilon_{33}\\\Delta\varepsilon_{23}\\\Delta\varepsilon_{31}\\\Delta\varepsilon_{12}\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0&0&0&0&0&1\\0&2&0&0&0&0&1\\0&0&2&0&0&0&1\\0&0&0&2&0&0&0\\0&0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&0&2&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta I_{G11}\\\Delta I_{G22}\\\Delta I_{G33}\\\Delta I_{G23}\\\Delta I_{G31}\\\Delta I_{G12}\\\Delta I_B\end{Bmatrix} \tag{6}$$

$$\{\Delta\sigma\}=[D_v]\{\Delta\varepsilon\}-\{\Delta\sigma_v\}$$

ここで、K_v, G_v は材料定数および時間間隔 Δt の関数で、次の形を持つ。

$$K_v=K_0+\sum_{\alpha=1}^{n}K_\alpha\frac{1}{k_\alpha\Delta t}\left\{1-e^{-k_\alpha\Delta t}\right\}\quad,\quad G_v=G_0+\sum_{\alpha=1}^{n}G_\alpha\frac{1}{g_\alpha\Delta t}\left\{1-e^{-g_\alpha\Delta t}\right\} \tag{7}$$

又、ΔI は Δt 前の応力およびひずみで定義される。

$$\Delta I_{Gij}=\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{1-e^{-g_\alpha\Delta t}\right\}\left\{\sigma_{ij}(t-\Delta t)-G_0\,\varepsilon_{ij}(t-\Delta t)\right\}\quad,\quad \Delta I_B=\Delta I_{Krr}-\frac{2}{3}\Delta I_{Grr} \tag{8}$$

従って、この(6)式を弾性問題における有限要素法に適用すれば、増分形での剛性方程式を得る。

$$\{\Delta F\}=[\mathbb{K}_v]\{\Delta\delta\}-\{\Delta F_v\}-\{\Delta F_p\} \tag{9}$$

ここで

$$[\mathbb{K}_v]=\int_v[B]^T[D_v][B]dv,\quad \{\Delta F_v\}=\int[B]^T\{\Delta\sigma_v\}dv,\quad \{\Delta F_p\}=\int_v[N]^T\{\Delta P\}dv \tag{10}$$

であり，それぞれ 剛性マトリックス，粘弾性変形によるみかけの節点力，および物体力による節点力増分をあらわす。

3. 計算方法

構造材料のクリープ実験が基礎となって，K_0，K_α，k_α，G_0，G_α，g_α，n が定まれば[1] あとは剛性方程式(9)を段階的に解いてゆくことに帰する。その手順を簡単に述べると

(i) 時間間隔 Δt を設定し，剛性マトリックス $[K_\nu]$ を作成する。

(ii) (8)式より $\{\Delta I\}$ を求め(10)式より $\{\Delta F_\nu\}$ を計算する。

(iii) 剛性方程式(9)を解く。

(iv) 応力，ひずみを全要素について計算し，次段階の $\{\Delta I\}$ を求める。あとは Δt ずつ計算を進める。

4. 計算例

4. 1 無筋プレストレストコンクリートばり

はりは，図-2に示すように断面 $20\times45\,cm^2$，スパン900cmのポストテンショニング，フルプレストレッシングの無筋単純ばりを考えた。従って，プレストレスは外力として，各節点に作用し，クリープの進行とともに緩和すると考えればよい。計算に用いた材料定数は，$E_0=10^5\,Kg/cm^2$，$E_1=1.5\times10^5\,Kg/cm^2$，$T_1=10^5\,sec$，$n=1$ である。ここで T_1 は単軸の緩和時間であり，k_α，g_α の逆数に相当する。又 E_0 は有効弾性係数，E_0+E_1 が瞬間弾性係数である。

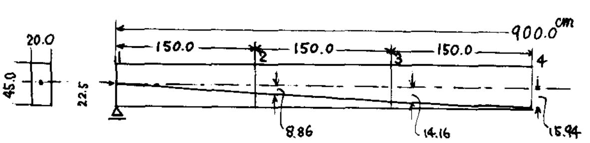

図-2 プレストレストコンクリートばり

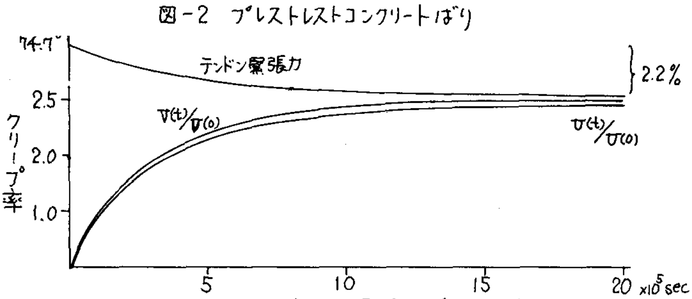

図-3 クリープ率及び緊張力緩和曲線

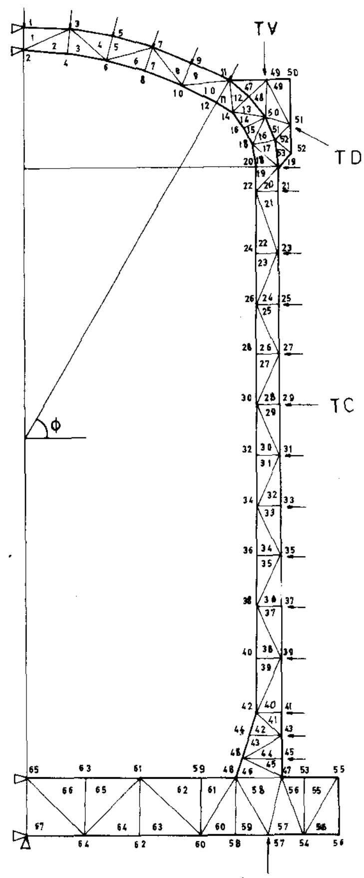

図-4 要素分割及び節点力

4. 2 プレストレストコンクリート原子炉格納容器

容器の形状，寸法ならびに構造の概要を図-4に示すが，一般的にこの種の型が使われている。荷重には，プレストレスのみを考え，その作用節点と，要素分割を同図に示してある。そして，構造ならびに外力の作用状態から，軸対称構造物として解析した。コンクリートの粘弾性定数は，別

のクリープ実験から定められ[1]，次のように仮定した。

$G_0 = 5.0\times10^4\,\mathrm{Kg/cm^2}$，$G_1 = 3.5\times10^4\,\mathrm{Kg/cm^2}$，$g_1 = 100$ 日，$K_0 = 8.0\times10^4\,\mathrm{Kg/cm^2}$，$K_1 = 3.0\times10^4\,\mathrm{Kg/cm^2}$，$k_1 = 100$ 日

計算結果を次に示す。

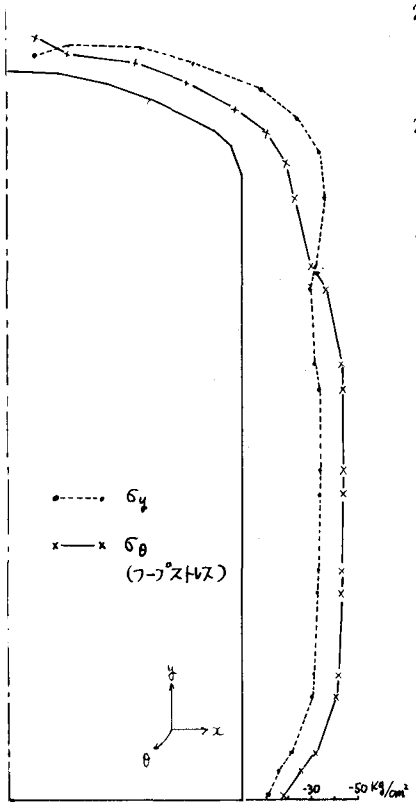

図-5 瞬間応力分布

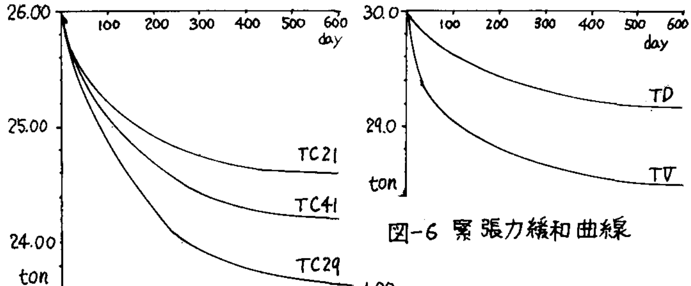

図-6 緊張力緩和曲線

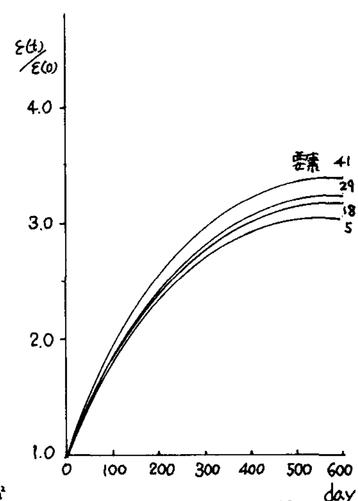

図-7 クリープ曲線

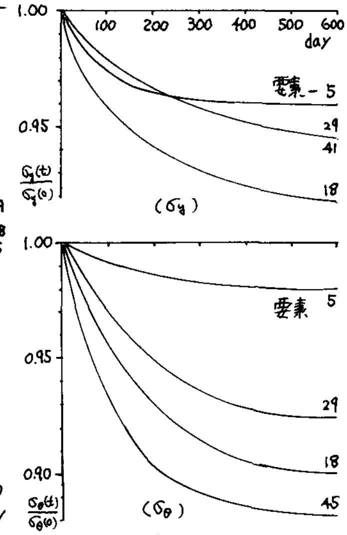

図-8 応力緩和曲線

図-5 は参考のため弾性応答を記したものであるが，ほぼ妥当な応力値，および分布を示している。プレストレスは，内圧 $4\,\mathrm{Kg/cm^2}$ に対する引張応力をキャンセルするように与えた。図-6 にその緊張力緩和を示したが，円筒中央部，TC29 のテンドンが最も大きな緩和を呈し，ドーム部が小さい。又，図-8 の応力緩和曲線では，円筒中央部(要素 29) より，周辺部 (要素 18, 45) の緩和が大きいことに注意を要する。

結局，このように構造物の部分によってクリープ率が異なる，という事実を知ることは重要である。

4. 参考文献

1). 色部，赤木．「粘弾性材料における緩和関数の決定について」．土木学会年次学術講演論文集

2) 色部，赤木．「空洞を有する地盤の粘弾性変形」昭和46年度東北支部技術研究発表講演集

3). D.M. Malone, J. Conner; "Finite Elements and Dynamic Viscoelasticity" J.E.M.D, Aug. 1971

4). Eringen; "Mechanics of Continua" John Wiley & Sons, Inc. 1967

5). I.J. Jordan, etc; "The creep of sealed concrete under multiaxial compressive stresses", M.C.R, Vol.21