I-115　ＰＣ合成連続桁のクリープおよび収縮応力解析

九州大学工学部　正会員　彦坂　熙
九州大学工学部　学生員　○田中康順

１．緒言

ＰＣ桁橋の架設施工には種々の工法があるが、近年プレキャストＰＣ単純桁と現場打ちコンクリート床版を組み合わせたＰＣ合成桁が用いられるようになり、さらに経済性や自動車の走行性において幾多の利点を有する連続桁橋としての工事例も多く見受けられる[1)]。ＰＣ合成連続桁橋の標準的な架設施工順序と各時点での作用荷重を示せば次のとおりである[2)]。

(i)プレキャストＰＣ主桁のコンクリート打設。(ii)プレキャスト主桁にプレストレッシングを行う。(iii)プレストレッシングを完了したＰＣ主桁を単純桁として橋脚上に架設。(iv)横桁コンクリート打設。横桁自重は単純桁としての主桁に作用する。(v)主桁の連続ケーブルを緊張し連続桁にする。

(vi)中間支点付近の一次床版コンクリート打設。この自重は連続桁としての主桁に作用する。

(vii)床版ケーブルを緊張する。この床版プレストレスは、一次床版合成後の変断面連続桁に作用する。

(viii)支間中央部の二次床版コンクリート打設。この自重は(vii)と同じ変断面連続桁に作用する。

(ix)地覆、高欄、舗装などを施工する。これらの後死荷重は完全な連続合成桁に作用する。

(x)活荷重載荷

上記により架設施工されるＰＣ合成連続桁は、主桁架設直後には支点の不静定モーメントを生じないが、プレキャスト桁と現場打ち床版のコンクリートのクリープ差および収縮差により時間の経過とともに新たに不静定力が発生し、当初と全く異なる応力分布を示すようになる。これに関する既往の研究[3)]の一部はわが国の現行の設計式[2),4)]にも取り入れられているが、クリープ現象の取り扱いや理論式の誘導過程に不明確な点も多い。本論は、かかる構造形式の橋梁に関してコンクリートのクリープ、収縮現象と架設施工順序をできうる限り忠実、精密に考慮して応力解析を行い、合理的かつ実用的な設計式を導かんとするものである。

２、コンクリートのクリープ係数および収縮ひずみ

時間tの原点を1.の(i)のプレキャストＰＣ桁のコンクリート打設時にとり、床版コンクリート打設後、合成作用開始時刻を$t=\tau_1$とする。しかる時、$t>\tau_1$なる任意時刻tにおけるプレキャスト桁および床版のクリープ係数φ_1, φ_2と自由収縮ひずみS_1, S_2を次式で表わす[5)]。

プレキャスト桁：
$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(t,\tau)=\Phi_1 k_1(\tau)\left[1-e^{-\gamma(t-\tau)}\right],\quad ここに\quad k_1(\tau)=e^{\beta_1(28-\tau)} \\ &S_1(t)=S_{\infty 1}\left[1-e^{-\gamma t}\right] \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

床　版　：
$$\left.\begin{aligned} &\varphi_2(t,\tau)=\Phi_2 k_2(\tau)\left[1-e^{-\gamma(t-\tau)}\right],\quad ここに\quad k_2(\tau)=e^{\beta_2(28-\tau+\tau_1)} \\ &S_2(t)=S_{\infty 2}\left[1-e^{-\gamma(t-\tau_1)}\right] \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

上式において、γ, β_1, β_2は実験により定まる定数, Φ_1, Φ_2は標準クリープ係数, $S_{\infty 1}$, $S_{\infty 2}$, は$t\to\infty$における最終自由収縮ひずみである。

時刻$t=\tau_1$においてプレキャストＰＣ桁に作用する主桁有効プレストレス, 主桁・横桁・床版の自重、床版プレストレスなどによる応力をσ_{10}, 任意時刻tにおけるそれを$\sigma_{10}+\sigma_{1t}$とすれば、$t=\tau_1$以

降に生ずるプレキャストＰＣ桁のクリープひずみε_{1t}，は次式で表わされる。

$$\varepsilon_{1t}=\frac{1}{E_1}\left\{\sigma_{1t}+\sigma_{10}\varphi_1(t,\tau_1)-\int_{\tau_1}^{t}\sigma_{1t}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi_1(t,\tau)d\tau\right\}-\{S_1(t)-S_1(\tau_1)\} \tag{3}$$

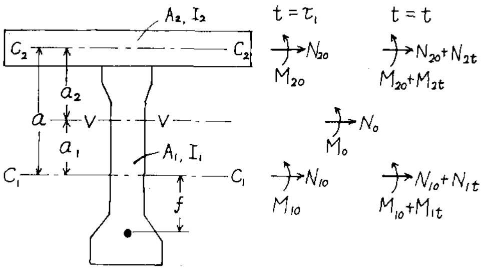
ただし、E_1：ＰＣ主桁コンクリートのヤング係数

同様に、時刻$t=\tau_1$において床版に作用する二次床版自重および床版プレストレスによる応力をσ_{20}，任意時刻tにおけるそれを$\sigma_{20}+\sigma_{2t}$ とすれば、床版のクリープひずみε_{2t}，は

$$\varepsilon_{2t}=\frac{1}{E_2}\left\{\sigma_{2t}+\sigma_{20}\varphi_2(t,\tau_1)-\int_{\tau_1}^{t}\sigma_{2t}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi_2(t,\tau)d\tau\right\}-S_2(t) \tag{4}$$

ただし、E_2：床版コンクリートのヤング係数

3．ＰＣ合成桁の弾性理論とクリープ基本式



図－1

図－１のごときＰＣ合成桁断面を考え、プレキャストＰＣ桁の断面積および断面二次モーメントをそれぞれA_1，I_1，その図心軸をC_1-C_1とし、床版の断面積および断面二次モーメントをそれぞれA_2，I_2，その図心軸をC_2-C_2とする。また合成断面の重心軸V-Vに関する総断面二次モーメント（床版はヤング係数比 $n=E_1/E_2$を用いて主桁に換算する）をI_vとし、V-VからC_1-C_1およびC_2-C_2までの距離をそれぞれa_1，a_2，さらに$a_1+a_2=a$とする。なお、主桁のＰＣ鋼材は図心軸C_1-C_1の下方fの位置に集中して配置されるものと考える。

いまＰＣ合成桁に作用する外力としてモーメントM_0および合成断面の重心に働く軸力N_0を与えるとき、主桁の曲げモーメントM_{10}，その重心に働く軸力N_{10}，および床版の曲げモーメントM_{20}，軸力N_{20}は弾性理論より次式で求められる。

$$M_{10}=\frac{I_1}{I_v}M_0,\quad N_{10}=\frac{a_2}{a}N_0-\frac{A_1a_1}{I_v}M_0,\quad M_{20}=\frac{I_2}{nI_v}M_0,\quad N_{20}=\frac{a_1}{a}N_0+\frac{A_1a_1}{I_v}M_0 \tag{5}$$

次に、任意時刻tにおける主桁および床版の曲げモーメントと軸力をそれぞれ$M_{10}+M_{1t}$，$N_{10}+N_{1t}$，$M_{20}+M_{2t}$，$N_{20}+N_{2t}$とすれば、平面保持の仮定および式(3)、(4)より次式が成立する。

$$\frac{1}{E_2A_2}\left\{N_{2t}+N_{20}\varphi_2(t,\tau_1)-\int_{\tau_1}^{t}N_{2t}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi_2(t,\tau)d\tau\right\}-S_2(t)$$
$$=\frac{1}{E_1A_1}\left\{N_{1t}+N_{10}\varphi_1(t,\tau_1)-\int_{\tau_1}^{t}N_{1t}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi_1(t,\tau)d\tau\right\}-\frac{a}{E_1I_1}\left\{M_{1t}+M_{10}\varphi_1(t,\tau_1)-\int_{\tau_1}^{t}M_{1t}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi_1(t,\tau)d\tau\right\}-\{S_1(t)-S_1(\tau_1)\} \tag{6a}$$

$$\frac{1}{E_2I_2}\left\{M_{2t}+M_{20}\varphi_2(t,\tau_1)-\int_{\tau_1}^{t}M_{2t}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi_2(t,\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{E_1I_1}\left\{M_{1t}+M_{10}\varphi_1(t,\tau_1)-\int_{\tau_1}^{t}M_{1t}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi_1(t,\tau)d\tau\right\} \tag{6b}$$

上式の両辺をtで２回微分のうえ整理すれば

$$\frac{1}{E_2A_2}\left[\ddot{N}_{2t}+\gamma\{1+\varphi_2k_2(t)\}\dot{N}_{2t}\right]=\frac{1}{E_1A_1}\left[\ddot{N}_{1t}+\gamma\{1+\varphi_1k_1(t)\}\dot{N}_{1t}\right]-\frac{a}{E_1I_1}\left[\ddot{M}_{1t}+\gamma\{1+\varphi_1k_1(t)\}\dot{M}_{1t}\right] \tag{7a}$$

$$\frac{1}{E_2I_2}\left[\ddot{M}_{2t}+\gamma\{1+\varphi_2k_2(t)\}\dot{M}_{2t}\right]=\frac{1}{E_1I_1}\left[\ddot{M}_{1t}+\gamma\{1+\varphi_1k_1(t)\}\dot{M}_{1t}\right] \tag{7b}$$

式(7)は静定、不静定の如何を問わずＰＣ合成桁の任意点における断面力の時間的変化量M_{1t}，N_{1t}，M_{2t}およびN_{2t}の間に常に成立するクリープ基本式である。

4．外力モーメントが一定の場合の解

合成断面に働く外力モーメントM_0および軸力N_0が一定（時間的に変化しない）とすれば、任意時刻

tにおける力のつり合い条件より次式が成立する。

$$N_{1t} = -N_{2t} \qquad (8)_a \; , \qquad M_{1t} = N_{2t}\,a - M_{2t} \qquad (8)_b$$

通常のＰＣ合成桁ではM_{2t}はM_{1t}に比して極めて小さく式$(8)_b$においてM_{2t}は無視できるゆえ、

$$M_{1t} = N_{2t}\,a \; . \qquad (8)_b'$$

式$(8)_a$および$(8)_b'$を式$(7)_a$に代入し、$t=\tau_1$で$N_{2t}=0$なる初期条件を考慮すればN_{2t}の解がえられる。次いで式$(8)_b'$を式$(7)_b$の右辺に代入し、同じく$t=\tau_1$で$M_{2t}=0$なる初期条件を考慮すればM_{2t}が求められることになる。途中の演算を省略し、後の便宜上肩に肩字0を付して結果をまとめて示せば次式のごとくである。

$$\left.\begin{aligned} N^0_{2t} &= -N^0_{1t} = \left\{\left(\frac{E_2A_2S_n}{\varphi_{2n}} - N_{20}\right) + \frac{A_2}{nA_1}\left(N_{10} - \frac{A_1a}{I_1}M_{10}\right)\frac{\varphi_{1n}}{\varphi_{2n}}\right\}\frac{\varphi_{2n}}{\varphi_n}C(t,\tau_1), \qquad M^0_{1t} = N^0_{2t}\,a \\ M^0_{2t} &= \left(\frac{I_2}{nI_1}M_{10}\frac{\varphi_{1n}}{\varphi_{2n}} - M_{20}\right)G(t,\tau_1) + \frac{I_2a}{nI_1}\cdot\frac{\alpha}{1-\alpha}\left\{\left(\frac{E_2A_2S_n}{\varphi_{2n}} - N_{20}\right) + \frac{A_2}{nA_1}\left(N_{10} - \frac{A_1a}{I_1}M_{10}\right)\frac{\varphi_{1n}}{\varphi_{2n}}\right\}\left\{G(t,\tau_1) - \frac{\varphi_{2n}}{\varphi_n}C(t,\tau_1)\right\} \end{aligned}\right\} (9)$$

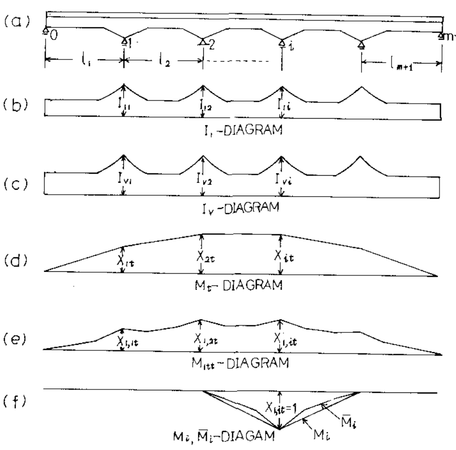
ここに、$\alpha = 1\Big/\left\{1+\frac{A_2}{nA_1}\left(1+\frac{A_1a^2}{I_1}\right)\right\}$, $\quad \varphi_{1n} = \phi_1 k_1(\tau_1)$, $\quad \varphi_{2n} = \phi_2 k_2(\tau_1)$, $\quad \varphi_n = \varphi_{2n} + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\varphi_{1n}$

$$S_n = S_{n2} - S_{n1}e^{-\gamma\tau_1}, \qquad C(t,\tau_1) = \gamma\alpha\varphi_n\int_{\tau_1}^{t} EXP\left[-\gamma\int_{\tau_1}^{\tau}\{1+\alpha\phi_2k_2(\tau)+(1-\alpha)\phi_1k_1(\tau)\}d\tau\right]d\tau \; ,$$

$$G(t,\tau_1) = \gamma\varphi_{2n}\int_{\tau_1}^{t} EXP\left[-\gamma\int_{\tau_1}^{\tau}\{1+\phi_2k_2(\tau)\}d\tau\right]d\tau \, .$$

5．ＰＣ合成連続桁のクリープの一般解法

図-2(a)のごとき（$m+1$）径間のＰＣ合成連続桁を考え、左端から0，1，2，…$m+1$の支点番号を付す。図(b)、(c)はI_1およびI_vの変化の模様を示したもので、i支点における値をそれぞれI_{1i}, I_{vi}とする。当初$t=\tau_1$において死荷重およびプレストレスにより合成桁の各断面に作用する断面力M_{10}, N_{10}, M_{20}およびN_{20}は、任意時刻tにはコンクリートのクリープおよび収縮によりそれぞれM_{1t}, N_{1t}, M_{2t}およびN_{2t}だけ変化するが、ＰＣ合成連続桁では外力モーメントM_0も時間的に変化するため、これらの断面力の変化量はM_0が一定の場合の式(9)の値とM_0の変化により生ずる量（脚字πを付して表わす）との和になる。すなわち



図－2

$$M_{1t} = M^0_{1t} + M_{1\pi t}, \qquad N_{1t} = N^0_{1t} + N_{1\pi t}, \qquad M_{2t} = M^0_{2t} + M_{2\pi t}, \qquad N_{2t} = N^0_{2t} + N_{2\pi t} \qquad (10)$$

M_0の時間的変化量M_tのi支点における値をX_{it}とし、これに対応する主桁の曲げモーメント$M_{1\pi t}$のi支点における値を$X_{1,it}$とする。図(a)のm次不静定連続桁のm個の中間支点にヒンジを挿入した静定基本系において、i支点に単位モーメント$X_{it}=1$を加えた場合の合成断面の曲げモーメントをM_i, $X_{1,it}=1$を加えた場合の主桁の曲げモーメントを$\bar{M}_i$とし（図(f)参照）、

$$\bar{M}_i = M_i\,\frac{I_{vi}}{I_v}\,\frac{I_1}{I_{1i}}$$

の関係が成り立つものとすれば、所要の$M_{1\pi t}$は次式で求められる。

$$M_{1\pi t} = \sum_{i=1}^{m} X_{1,it}\,\bar{M}_i \qquad (11)$$

$X_{1,it}$（$i=1,2,\cdots,m$）を求める連立微分方程式は次式で与えられる。

$$
\begin{bmatrix} \delta'_{11} & \delta'_{12} & \cdots & \delta'_{1m} \\ \delta'_{21} & \delta'_{22} & \cdots & \delta'_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta'_{m1} & \delta'_{m2} & \cdots & \delta'_{mm} \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} X_{1,1t}-\int_{\tau_1}^{t} X_{1,1t}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi_1(t,\tau_1)\,d\tau \\ X_{1,2t}-\int_{\tau_1}^{t} X_{1,2t}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi_1(t,\tau_1)\,d\tau \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{1,mt}-\int_{\tau_1}^{t} X_{1,mt}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi_1(t,\tau_1)\,d\tau \end{Bmatrix}
+ \begin{Bmatrix} \delta_{1t} \\ \delta_{2t} \\ \vdots \\ \delta_{mt} \end{Bmatrix} = 0 \tag{12}
$$

ここに、 $\delta'_{ji}=\int_l \frac{M_j\bar{M}_i}{E_1I_1}dx$, $\delta_{jt}=\int_l \frac{M_j}{E_1I_1}\left\{M^{\circ}_{it}+M_{10}\varphi_1(t,\tau_1)-\int_{\tau_1}^{t}M_{it}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi_1(t,\tau)\,d\tau\right\}dx$

式(12)の左辺の係数δ'_{ji} $(i,j=1,2,\cdots,m)$ を要素とする行列式を$|D|$，そのj行i列要素δ'_{ji}の余因数をA_{ji} とすれば、式(12)の解$X_{1,it}$ $(i=1,2,\cdots,m)$が次のように求められる。

$$
X_{1,it}=-\frac{1}{|D|}\sum_{j=1}^{m}A_{ji}\left\{\int_l\frac{M_jM^{\circ}_{it}}{E_1I_1}dx+U(t,\tau_1)\int_l\frac{M_jM_{10}}{E_1I_1}dx\right\} \tag{13}
$$

ここに $U(t,\tau_1)=\gamma\varphi_{1n}\int_{\tau_1}^{t}EXP\left[-\gamma\int_{\tau_1}^{\tau}\{1+\varphi_1k_1(\tau)\}d\tau\right]d\tau$

式(13)を式(11)に代入して先ずM_{1t}がえられ、次いでPC合成桁のクリープ基本式(7)より残りの断面力変化量N_{1t}, M_{2t} およびN_{2t}が求められる。結果をまとめて示せば次式のごとくである。

$$
\left.\begin{aligned}
M_{1t}&=\sum_{j=1}^{m}B_j\int_l\frac{M_jM^{\circ}_{it}}{E_1I_1}dx+U(t,\tau_1)\sum_{j=1}^{m}B_j\int_l\frac{M_jM_{10}}{E_1I_1}dx\\
M_{2t}&=-\frac{I_2}{nI_1}\sum_{j=1}^{m}B_j\int_l\frac{M_jM^{\circ}_{it}}{E_1I_1}\cdot\frac{\alpha}{1-\alpha}dx\\
&\quad+\frac{I_2}{nI_1}G(t,\tau_1)\left[\frac{\varphi_{1n}}{\varphi_{2n}}\sum_{j=1}^{m}B_j\int_l\frac{M_jM_{10}}{E_1I_1}dx+\sum_{j=1}^{m}B_j\int_l\frac{M_j}{E_1I_1}\frac{\alpha}{1-\alpha}a\left\{\left(\frac{E_2A_2S_n}{\varphi_{2n}}-N_{20}\right)+\frac{A_2}{nA_1}\left(N_{10}-\frac{A_1a}{I_1}M_{10}\right)\frac{\varphi_{1n}}{\varphi_{2n}}\right\}dx\right]\\
N_{2t}&=-N_{1t}=\frac{A_2a}{nI_1}\bar{\alpha}\sum_{j=1}^{m}B_j\int_l\frac{M_jM^{\circ}_{it}}{E_1I_1}\cdot\frac{\alpha}{\bar{\alpha}-\alpha}dx\\
&\quad-\frac{A_2a}{nI_1}\bar{\alpha}L(t,\tau_1)\left[\frac{\varphi_{1n}}{\varphi'_n}\sum_{j=1}^{m}B_j\int_l\frac{M_jM_{10}}{E_1I_1}dx+\sum_{j=1}^{m}B_j\int_l\frac{M_j}{E_1I_1}\cdot\frac{\alpha}{\bar{\alpha}-\alpha}a\left\{\left(\frac{E_2A_2S_n}{\varphi_{2n}}-N_{20}\right)+\frac{A_2}{nA_1}\left(N_{10}-\frac{A_1a}{I_1}M_{10}\right)\frac{\varphi_{1n}}{\varphi_{2n}}\right\}dx\right]
\end{aligned}\right\} \tag{14}
$$

ここに、$B_j=-\frac{1}{|D|}\sum_{j=1}^{m}A_{ji}\bar{M}_i$,　　$\bar{\alpha}=1/\left(1+\frac{A_2}{nA_1}\right)$,　　$\varphi'_n=\varphi_{2n}+\left(\frac{1-\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}}\right)\varphi_{1n}$,

$L(t,\tau_1)=\gamma\bar{\alpha}\varphi'_n\int_{\tau_1}^{t}EXP\left[-\gamma\int_{\tau_1}^{\tau}\{1+\bar{\alpha}\varphi_2k_2(\tau)+(1-\bar{\alpha})\varphi_1k_1(\tau)\}d\tau\right]d\tau$.

6. 実用式

式(9)および(14)に含まれる関数$C(t,\tau_1)$, $G(t,\tau_1)$, $U(t,\tau_1)$,および$L(t,\tau_1)$の計算には一般に数値積分を必要とし面倒であるが、特例として式(1)、(2)にて$\beta_1=\beta_2=\gamma$の場合に限り次式が成立する。

$$
C(t,\tau_1)=1-e^{-\alpha\varphi},\qquad G(t,\tau_1)=1-e^{-\varphi_2},\qquad U(t,\tau_1)=1-e^{-\varphi_1},\qquad L(t,\tau_1)=1-e^{-\bar{\alpha}\varphi'} \tag{15}
$$

ここに、 $\varphi=\varphi_2(t,\tau_1)+\frac{1-\alpha}{\alpha}\varphi_1(t,\tau_1)$,　　$\varphi'=\varphi_2(t,\tau_1)+\left(\frac{1-\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}}\right)\varphi_1(t,\tau_1)$

この特例はクリープ係数に慣用の whitney の法則を導入することを意味し、設計における実用計算には式(9)および(14)に式(15)を代入すれば演算が極めて簡単になる。

参考文献

1)日本道路公団：東名高速道路建設誌，昭和45年6月.

2)日本道路公団：高速道路標準設計－ポストテンション連続合成桁基本設計計算書，昭和41年10月

3)高速道路調査会；PC合成桁の実験と理論解析，昭和42年1月.

4)日本道路協会：プレストレスコンクリート道路橋設計示方書

5)彦坂 熙；変断面連続合成桁橋のクリープおよび収縮応力解法，土木学会論文報告集，第199号，昭和47年3月