I-101 DIE BERÜCKSICHTIGUNG DER QUERSCHNITTSVERFORMUNGEN BEI DER WÖLBKRAFTTORSION VON DÜNNWANDIGEN TRÄGERN MIT OFFENEM PROFIL

Von Masaharu Hirashima §

○ Tsuneo Usuki §§

(Mitglieder des JSCE)

1. Einleitung

Neuerdings steigert sich die Nachfrage nach dünnwandigen Konstruktionen mit Vergrößerungsfähigkeit. Das kommt aus dem folgenden Grunde: durch die Zusammensetzung der Einzelscheiben läßt sich die Leistung der Querschnittsgrößen erhöhen, und läßt sich die statische Qualität der Konstruktion verbessern. Um sie zu verbessern und um das Konstruktionsgewicht leichter zu machen, muß man dann die Einzelscheiben möglichst dünn und breit machen.

In den letzten Jahren werden stärkere Stoffe als bisher einer nach dem andern erforscht und produziert, und auch die Schweißtechnik hat große Fortschritte gemacht. Daher wird es möglich, verschiedene Materialien frei zusammenzusetzen.

Mit dem Fortgang der Vergrößerung und Verdünnung der Konstruktionen können bei ihnen Querschnittsverformungen leicht auftreten. Und der Einfluß dieser Verformungen ist nicht mehr zu übersehen. Die allgemeine Stabstatik hat als grundlegende Voraussetzung, daß die Querschnittsform unter Belastung erhalten bleibt. Wenn die Dicke der Platte dünner wird, kann aber diese Voraussetzung nicht mehr erhalten bleiben. Darum ist eine neu entwickelte „Theorie mit der Berücksichtigung der Querschnittsverformung" sehr brauchbar.

2. Voraussetzungen

Hierbei handelt es sich um einen Π-Träger, der die allgemeinste Form in den Baukonstruktionen ist. Wenn der Träger mehr Stege hat, handelt es sich dabei trotzdem um ein Problem dieser allgemeinen Form, weil man das natürlich auf dieselbe Weise berechnen kann.

Die Wanddicken von Gurten und Stegen seien klein gegenüber der Gurtbreite und der Trägerhöhe.

Um die Einflüsse des Torsionsmomentes auf die Querschnittsverformungen zu untersuchen, ist der Träger nur mit reinen Torsionsmomenten belastet.

Ferner seien alle Verformungen klein gegen die Trakwerksabmessungen, so daß das Gleichgewicht am unverformten System aufgestellt werden kann (Theorie I. Ordnung).

3. Gebräuchliche Theorie

Unter der Voraussetzung, daß die Querschnittsgestalt eines Stabes erhalten bleibt, wenn sich der Stab unter der Wirkung eines Torsionsmomentes verformt, wird die Ableitung der

§ Prof. Dr.-Ing., Waseda Universität

§§ Doktorand an der Waseda Universität

Differentialgleichung für die Wölbkrafttorsion

$$T = -EI_w \frac{d^3\theta}{dz^3} + GJ_D \frac{d\theta}{dz} \qquad (1)$$

aufgebaut. In Gl.(1) bedeuten

- T : Torsionsmoment
- E : Elastizitätsmodul
- G : Schubmodul
- J_D: St. Venantscher Drillwiderstand
- I_w: Wölbwiderstand
- θ : Drillwinkel
- z : Ordinate in Achsenrichtung des Stabes

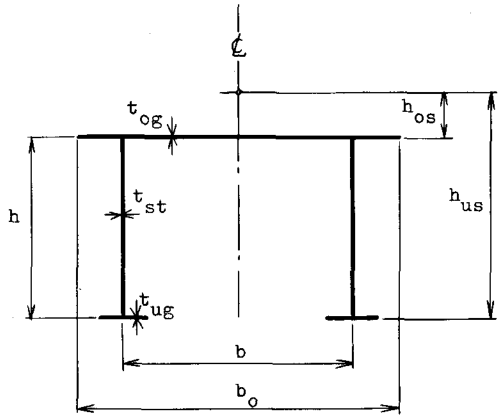

Bild 1.

Die Lösung der Differentialgleichung lautet also

$$\theta = C_1 \cosh az + C_2 \sinh az + C_3 + \frac{T}{GJ_D} z \qquad \text{mit} \qquad a = \sqrt{\frac{GJ_D}{EI_w}} . \qquad (2)$$

Die drei Konstanten C_1, C_2 und C_3 der Gl.(2) sind aus den Randbedingungen zu bestimmen.

4. Theorie mit der Berücksichtigung der Querschnittsverformung

Der Zustand der Querschnittsverformung ist nach Bild 2 definiert. Dabei werden die Bezeichnungen β_1, β_2, R und θ alle positiv gezählt, wenn sie im Uhrzeigersinn tordiert werden. Wenn man alle Elemente wie Bild 3 betrachtet, werden die z-abhängigen Schnittkräfte pro Längeneinheit m_o, m_u, q_o und q_u eingeführt.

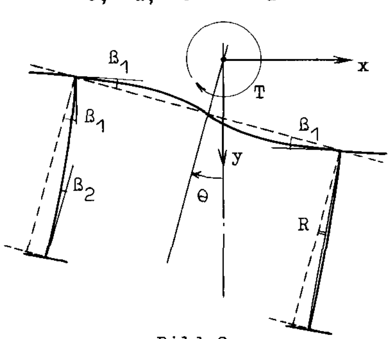

Bild 2.

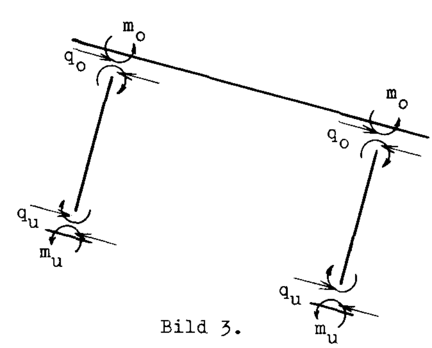

Bild 3.

Bild 2 zeigt, daß der Obergurt um den Winkel θ, der Untergurt um den Winkel $(\theta - \beta_2)$ und die zwei Stege um den Winkel $(\theta - R)$ verdreht sind. Die Differentialgleichungen der Torsion lauten nun für den Obergurt, den Steg und den Untergurt wie folgt:

$$GJ_{og}\theta'' - 2m_o = 0 \qquad (3\text{-}1)$$

$$GJ_{st}(\theta - R)'' + m_o + m_u + (q_o h_{os} - q_u h_{us} + q_{st} h_{st}) = 0 \qquad (3\text{-}2)$$

$$GJ_{ug}(\theta - \beta_2)'' - m_u = 0 \qquad (3\text{-}3)$$

Und für das Gesamtelement läßt sich eine Gleichgewichtsbedingung herleiten.

$$(GJ_D\theta' - 2GJ_{st}R' - 2GJ_{ug}\beta_2') - EI_w\theta''' = T \tag{3-4}$$

Hier können m_o und m_u nach der Formel der Verdrehungsmethode wie folgt geschrieben werden.

$$m_o = 6\frac{N_{og}}{b}\beta_1 \tag{4}$$

$$m_u = 2\frac{N_{st}}{h}(-2\beta_2 - \beta_1 + 3R) \tag{5}$$

Eine Knotengleichung ergibt sich ferner an den Knoten, an denen der Obergurt und die Stege sich zusammenfügen.

$$2\frac{N_{st}}{h}(-2\beta_1 - \beta_2 + 3R) + 6\frac{N_{og}}{b}(-\beta_1) = 0 \tag{6}$$

N_{st} und N_{og} sind die Plattensteifigkeiten des Steges und des Obergurtes, und werden wie folgt ausgedrückt.

$$\begin{aligned} N_{st} &= E\frac{t_{st}^3}{12(1-\nu^2)} \\ N_{og} &= E\frac{t_{og}^3}{12(1-\nu^2)} \end{aligned} \tag{7}$$

Hier muß man darauf aufmerksam machen, daß die vier Gleichungen (3-1), (3-2), (3-3) und (3-4) nicht unabhängig sind. Sie fallen auf drei zusammen.

Das kann man leicht wie folgt beweisen.

(3-1) + (3-2)×2 + (3-3)×2:

$$GJ_D\theta'' - 2GJ_{st}R'' - 2GJ_{ug}\beta_2'' + 2(q_oh_{os} - q_uh_{us} + q_{st}h_{st}) = 0 \tag{8}$$

Hierbei ist das Glied $2(q_oh_{os} - q_uh_{us} + q_{st}h_{st})$ nach der Wölbkrafttorsionstheorie dem Wert $-EI_w\theta^{IV}$ sicher gleich. Wenn man die Gl.(3-4) einmal nach z differenziert, wird sie der Gl.(8) gleich.

Daher können die Gleichungen (3-1), (3-3), (3-4) und (6) ausgewählt werden, wenn die Gl.(3-2) als abhängige Gleichung nicht beachtet wird.

Hierbei gibt es also die vier Gleichungen für die vier unbekannten Verformungsgrößen (d.h. θ, β_1, β_2, R). Diese sind wie folgt:

$$GJ_{og}\theta'' - 12\frac{N_{og}}{b}\beta_1 = 0 \tag{9-1}$$

$$GJ_{st}(\theta - \beta_2)'' - 2\frac{N_{st}}{h}(-2\beta_2 - \beta_1 + 3R) = 0 \tag{9-2}$$

$$GJ_D\theta' - 2GJ_{st}R' - 2GJ_{ug}\beta_2' - EI_w\theta''' = T \tag{9-3}$$

$$2\frac{N_{st}}{h}(-2\beta_1 - \beta_2 + 3R) + 6\frac{N_{og}}{b}(-\beta_1) = 0 \tag{9-4}$$

Nun wird Gl.(9-3) wie folgt integriert:

$$(GJ_D\theta - 2GJ_{st}R - 2GJ_{ug}\beta_2) - EI_w\theta'' = Tz + K_o\,, \tag{9-3}$$

wobei K_o eine Integrationskonstante ist. Aus Gl.(9-1), (9-2), (9-3)′ und (9-4) kann man die drei Funktionen $ß_1$, $ß_2$ und R eliminieren, so ergibt sich eine Differentialgleichung nur für θ.

$$\theta^{IV} - 2A^2\theta'' + B^4\theta = D(Tz + K_o) \tag{10}$$

Dabei sind A, B und D Konstanten. Diese Gl.(10) hat die folgende allgemeine Lösung:

$$\theta = K_1 \sin vz \cdot \sinh uz + K_2 \sin vz \cdot \cosh uz + K_3 \cos vz \cdot \sinh uz + K_4 \cos vz \cdot \cosh uz + \frac{D}{B^4}(Tz + K_o) \tag{11}$$

$$\text{mit} \quad u = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{2}}, \qquad v = \sqrt{\frac{B^2 - A^2}{2}},$$

wobei K_1, K_2, K_3, K_4 und K_o Integrationskonstanten sind.

Die übrige Verformungsgrößen $ß_1$, $ß_2$ und R können nur durch die Integrationskonstanten ausgedrückt werden, wenn man Gl.(11) in Gl.(9) einsetzt. Man kann also alle Verformungsgrößen θ, $ß_1$, $ß_2$ und R finden, wenn die fünf Integrationskonstanten K_1, K_2, K_3, K_4 und K_o aus den Randbedingungen bestimmt werden.

5. Randbedingungen

Es wird angenommen, daß an beiden Enden Kopfplatten vorhanden sind, die eine Querschnittsverformung dort vorhindern. Nach Bild 4 lauten die Randbedingungen für z = 0 und z = 1 wie folgt:

$$z = 0 \quad \begin{cases} \theta = 0 \\ ß_2 = 0 \\ \theta' = 0 \end{cases} \qquad z = 1 \quad \begin{cases} ß_2 = 0 \\ \theta' = 0 \end{cases} \tag{12}$$

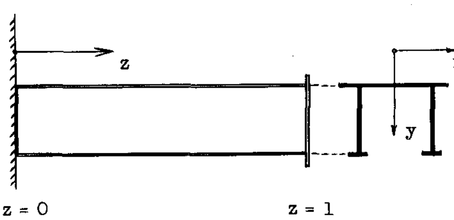

Bild 4.

Wenn $ß_2$ gleich Null ist, ergeben sich zwei Gleichungen, $ß_1 = 0$ und $R = 0$, von selbst.

Hierbei ergeben sich die fünf Randbedingungen für die fünf Integrationskonstanten. Also werden die fünf Integrationskonstanten aus den Randbedingungen bestimmt.

6. Berechnungsbeispiel

Die Berechnung dünnwandiger Träger mit offenen Querschnitten wird später veröffentlicht werden. Dann kann man auch die „Theorie mit der Berücksichtigung der Querschnittsverformung" mit der gebräuchlichen Theorie vergleichen.

LITERATUR

(1) Scheer, J.: Die Berücksichtigung der Stegverformungen bei der Wölbkrafttorsion von doppeltsymmetrischen I-Profilen. Der Stahlbau 24 (1955), Nr. 11, S. 257/260.

(2) Friemann, H.: Berechnung des stark gekrümmten dünnwandigen I-Trägers auf Biegung und Wölbkrafttorsion unter Berücksichtigung der Querschnittsverformung. Dissertation Darmstadt (D 17) 1968.