

I-97 曲げねじれを考慮した曲線桁の剛性マトリックスの解法

北海道大学工学部 正員 椽農知徳
北海道大学大学院 学生員 ○ 藤井裕司

1. まえがき

曲り梁の解析は、すでに多くの研究がありほぼ完成されている。また構造工学の分野で変断面より構成された骨組構造は非常に多く、従来から種々な解析法が提案されている。しかし変形法による解析法では曲り梁を含む骨組構造の解析に関しては殆んどのが曲げねじれ剛性を考慮していない。ただし、G. Becker¹⁾が還元法によってこの種のものを取り扱っている。実際の薄肉変断面曲り梁を含む骨組構造の解析では、曲げねじれを考慮しなければならない場合が非常に多い。そこで著者は、薄肉曲線桁の曲げねじれ解析を行い、曲げねじれ剛性を含む剛性マトリックスを誘導し、薄肉変断面曲線桁を含む骨組構造物を解析しようとするものである。

2. 曲線桁の曲げねじれ解析

今、一般的な曲線桁に面外荷重が作用し、曲率面内の作用荷重がない場合、曲率面外への変形の弾性方程式を、せん断中心軸の変形で表わせば、式(1)となる²⁾。

$$\left. \begin{aligned} & (EJ_y + \frac{EJ_{xy}}{R_s^2}) \frac{d^4 U}{dq^4} - GJ_T \frac{d^2 U}{dq^2} - \frac{E}{R_s} R_s \frac{d^4 \varnothing}{dq^4} + (GJ_T + EJ_y) R_s \frac{d^2 \varnothing}{dq^2} \\ & = R_s^4 \rho_x - R_s^3 \frac{dm_x}{dq} \\ & - \frac{EJ_{xy}}{R_s^2} \frac{d^4 U}{dq^4} + (GJ_T + EJ_y) \frac{d^2 U}{dq^2} + \frac{EJ_{xy}}{R_s^2} R_s \frac{d^4 \varnothing}{dq^4} - GJ_T R_s \frac{d^2 \varnothing}{dq^2} \\ & + EJ_y R_s \varnothing = R_s^3 m_z \end{aligned} \right\} (1)$$

ここで U; 垂直変位, \varnothing ; ねじれ角

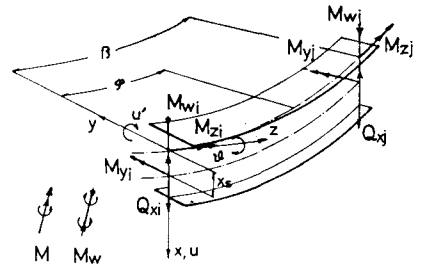


図-1 A Thin walled curved beam

式(1)の連立微分方程式を消去法により、Uを消去すると式(2)、 \varnothing とUの関係は式(3)となる。

$$\begin{aligned} & \frac{EJ_{xy}}{R_s^2} R_s \frac{d^6 \varnothing}{dq^6} + (2 \frac{EJ_{xy}}{R_s^2} - GJ_T) R_s \frac{d^4 \varnothing}{dq^4} + (\frac{EJ_{xy}}{R_s^2} - 2GJ_T) R_s \frac{d^2 \varnothing}{dq^2} - GJ_T R_s \varnothing = \frac{J_{xy}}{R_s^2 J_y} (R_s^4 \frac{d^2 \rho_x}{dq^2} - R_s^3 \frac{d^3 m_x}{dq^3}) \\ & + (1 + \frac{J_{xy}}{R_s^2 J_y}) R_s^3 \frac{d^2 m_z}{dq^2} - (1 + \frac{GJ_T}{EJ_y}) (R_s^4 \rho_x - R_s^3 \frac{dm_x}{dq}) - \frac{GJ_T}{EJ_y} R_s^3 m_z \end{aligned} \quad \text{----- (2)}$$

$$\begin{aligned} & (EJ_y + GJ_T + \frac{EJ_{xy}}{R_s^2}) \frac{d^2 U}{dq^2} + \frac{EJ_{xy}}{R_s^2} R_s \frac{d^2 \varnothing}{dq^2} + (\frac{EJ_{xy}}{R_s^2} - GJ_T) R_s \frac{d^2 \varnothing}{dq^2} + (EJ_y + \frac{EJ_{xy}}{R_s^2}) R_s \varnothing \\ & = \frac{J_{xy}}{R_s^2 J_y} (R_s^4 \rho_x - R_s^3 \frac{dm_x}{dq}) + (1 + \frac{J_{xy}}{R_s^2 J_y}) R_s^3 m_z \end{aligned} \quad \text{----- (3)}$$

式(2), (3)において $\lambda^2 = \frac{GJ_T}{EJ_{xy}} R_s^2$, $\tau = \frac{EJ_y}{GJ_T}$, $\gamma = \frac{2\lambda^2 \tau}{1 + \lambda^2 + \lambda^2 \tau}$ とおき、また剛性マトリックス法において、

中間荷重がないために式(2), (3)の右边を0とおくと式(2), (3)の同次方程式は式(4), (5)となる。

$$\frac{d^6 \varrho}{d\varphi^6} + (2 - \lambda^2) \frac{d^4 \varrho}{d\varphi^4} + (1 - 2\lambda^2) \frac{d^2 \varrho}{d\varphi^2} - \lambda^2 \varrho = 0 \quad \text{----- (4)}$$

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = - \frac{R_s}{1 + \lambda^2 + \lambda^2 \uparrow} \left\{ \frac{d^4 \varrho}{d\varphi^4} + (1 - \lambda^2) \frac{d^2 \varrho}{d\varphi^2} + (1 + \lambda^2 \uparrow) \varrho \right\} \quad \text{----- (5)}$$

ねじれ中心軸のねじれ率は、式(6)となる。 $\theta = \frac{1}{R_s} \left(\frac{d\varrho}{d\varphi} - \frac{1}{R_s} \frac{du}{d\varphi} \right)$ ----- (6)

式(4)の一般解は、

$$\varrho = C_1 \sinh \lambda \varphi + C_2 \cosh \lambda \varphi + C_3 \cos \varphi + C_4 \sin \varphi + C_5 \sin \varphi + C_6 \sin \varphi \quad \text{----- (7)}$$

式(5), (6) から、式(8), (9), (10)が得られる。

$$u = -R_s \left\{ C_1 \frac{1}{\lambda} \sinh \lambda \varphi + C_2 \frac{1}{\lambda} \cosh \lambda \varphi - C_3 \cos \varphi - C_4 (\varphi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) - C_5 \sin \varphi - C_6 (\varphi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \right\} + C_7 \varphi + C_8 \quad \text{----- (8)}$$

$$\frac{du}{R_s d\varphi} = - \left\{ C_1 \frac{1}{\lambda} \cosh \lambda \varphi + C_2 \frac{1}{\lambda} \sinh \lambda \varphi + C_3 \sin \varphi - C_4 (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) - \eta \cos \varphi - C_5 \cos \varphi - C_6 (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi) - \eta \sin \varphi \right\} + \frac{1}{R_s} C_7 \quad \text{----- (9)}$$

$$\theta = \frac{1}{R_s} \left\{ C_1 \frac{1 + \lambda^2}{\lambda} \cosh \lambda \varphi + C_2 \frac{1 + \lambda^2}{\lambda} \sinh \lambda \varphi + C_4 \eta \cos \varphi + C_6 \eta \sin \varphi - \frac{1}{R_s} C_7 \right\} \quad \text{----- (10)}$$

断面力と変形の関係式は、断面形状がx軸に関して対称断面をもつものとするとき式(11)となる。

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -\frac{EJ_x}{R_s} \frac{dK_y}{d\varphi} - \frac{GJ_T}{R_s} \theta + \frac{EJ_w}{R_s^3} \frac{d^2 \theta}{d\varphi^2}, & M_y &= -EJ_y K_y, & K_y &= \frac{1}{R_s^2} \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} - R_s \theta \right) \\ M_z &= GJ_T \theta - \frac{EJ_w}{R_s^2} \frac{d^2 \theta}{d\varphi^2}, & M_w &= -\frac{EJ_w}{R_s} \frac{d\theta}{d\varphi}, & \theta &= \frac{1}{R_s} \left(\frac{d\varrho}{d\varphi} - \frac{1}{R_s} \frac{du}{d\varphi} \right) \end{aligned} \right\} \quad \text{(11)}$$

3. 曲線桁の剛性マトリックス

式(7)~(10)に含まれる定数 $C_1 \sim C_8$ を材端 i, j における境界条件より定め、式(11)より両端の断面力と変形の関係式が求められる。

$$\begin{Bmatrix} Q_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \\ M_{wi} \\ Q_{xj} \\ M_{yj} \\ M_{zj} \\ M_{wj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{11}, K_{12}, K_{13}, K_{14}, K_{15}, K_{16}, K_{17}, K_{18} \\ K_{22}, K_{23}, K_{24}, K_{25}, K_{26}, K_{27}, K_{28} \\ K_{33}, K_{34}, K_{35}, K_{36}, K_{37}, K_{38} \\ K_{44}, K_{45}, K_{46}, K_{47}, K_{48} \\ K_{55}, K_{56}, K_{57}, K_{58} \\ K_{66}, K_{67}, K_{68} \\ K_{77}, K_{78} \\ K_{88} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_i' \\ \theta_i \\ \theta_i' \\ U_j \\ U_j' \\ \theta_j \\ \theta_j' \end{Bmatrix} \quad \text{----- (12)}$$

$$\{P\} = [K]\{U\}$$

ただし $(\quad)' = \frac{d}{R_s d\varphi}$

上式中の $[K]$ が、曲線桁の剛性マトリックスである。

式(7)～(10)に含まれる定数を次の様におく。

$$C_2 = B_1 U_i + B_2 U'_i + B_3 \varphi_i + B_4 \vartheta_i + B_5 U_j + B_6 U'_j + B_7 \varphi_j + B_8 \vartheta_j = \sum_{k=1}^8 B_k U_k, \quad C_1 = \sum_{k=1}^8 D_k U_k$$

$$C_4 = \sum_{k=1}^8 S_k U_k, \quad C_5 = \sum_{k=1}^8 F_k U_k, \quad C_3 = \sum_{k=1}^8 T_k U_k, \quad C_6 = \sum_{k=1}^8 H_k U_k, \quad C_7 = \sum_{k=1}^8 P_k U_k, \quad C_8 = \sum_{k=1}^8 Q_k U_k$$

こゝで

$$B_1 = \eta \sin \beta (\sin \beta - \beta) A_1 / A_5, \quad B_2 = -\eta R_5 \sin \beta A_3 / A_5, \quad B_6 = R_5 \eta \sin \beta \{A_3 - A_1 \{-\eta \beta \sin \beta + 2\eta(1 - \cos \beta)\}\} / A_5$$

$$B_3 = R_5 \eta \{A_3(1 - \cos \beta) - A_1 \{\sin \beta (\sin \beta - \beta) - \eta \beta \sin \beta + 2\eta(1 - \cos \beta)\}\} / A_5, \quad B_5 = -\eta \sin \beta (\sin \beta - \beta) A_1 / A_5$$

$$B_4 = R_5^2 \{A_3 \{\beta + (1 - \eta) \sin \beta\} - A_1 \{-\eta \beta^2 \sin \beta + \eta \sin \beta (1 - \cos \beta) + \eta \beta (1 - \cos \beta)\}\} / A_5$$

$$B_7 = R_5 \eta \{A_3(1 - \cos \beta) - A_1 \{\eta \beta \sin \beta \cos \beta - 2\eta \cos \beta (1 - \cos \beta) - \sin \beta (\sin \beta - \beta)\}\} / A_5$$

$$B_8 = R_5^2 \{-A_3 \{\beta + (1 - \eta) \sin \beta\} - A_1 \{\eta \beta \sin^2 \beta - \eta \sin \beta (1 - \cos \beta) - \eta^2 \beta \sin^2 \beta + 2\eta^2 \sin \beta (1 - \cos \beta) - \eta \beta (1 - \cos \beta)\}\} / A_5$$

$$A_1 = R_5 \{(1 + \lambda^2)(\beta + \sin \beta)(1 - \cosh \lambda \beta) / \lambda + \eta \{\sinh \lambda \beta (1 - \cos \beta) - \lambda \sin \beta (1 - \cosh \lambda \beta)\}\}$$

$$A_2 = -R_5 \{(1 + \lambda^2)(\beta + \sin \beta) \sinh \lambda \beta / \lambda - \eta \{(1 - \cos \beta)(1 + \cosh \lambda \beta) + \lambda \sin \beta \sinh \lambda \beta\}\}$$

$$A_3 = R_5 \eta \{(1 + \lambda^2) \sin \beta (1 - \cosh \lambda \beta) - \beta \sin \beta + 2(1 - \cos \beta)\} / \lambda - \eta \{\sinh \lambda \beta \cos \beta - \lambda \cosh \lambda \beta \sin \beta\} \{-\beta \sin \beta + 2(1 - \cos \beta)\} \\ + (\sin \beta - \beta)(1 + \lambda^2) \{\beta \sin \beta / \lambda - (1 - \cosh \lambda \beta)(1 - \cos \beta) / \lambda - \sinh \lambda \beta \sin \beta / \lambda^2\}$$

$$A_4 = -R_5 \eta \{(1 + \lambda^2) \sin \beta \sinh \lambda \beta / \lambda + \eta \{\cosh \lambda \beta \cos \beta - \lambda \sinh \lambda \beta \sin \beta - 1\}\} \{-\beta \sin \beta + 2(1 - \cos \beta)\} \\ - (\sin \beta - \beta)(1 + \lambda^2) \{\sinh \lambda \beta (1 - \cos \beta) / \lambda - \cosh \lambda \beta \sin \beta / \lambda^2 + \sin \beta / \lambda^2\}$$

$$A_5 = A_2 A_3 - A_4 A_1$$

$$D_1 = -A_2 B_1 / A_1, \quad D_2 = -(R_5 \eta \sin \beta + A_2 B_2) / A_1, \quad D_3 = \{R_5 \eta (1 - \cos \beta) - A_2 B_3\} / A_1$$

$$D_4 = \{R_5^2 \{\beta + (1 - \eta) \sin \beta\} - A_2 B_4\} / A_1, \quad D_5 = -A_2 B_5 / A_1, \quad D_6 = (R_5 \eta \sin \beta - A_2 B_6) / A_1$$

$$D_7 = \{R_5 \eta (1 - \cos \beta) - A_2 B_7\} / A_1, \quad D_8 = -\{R_5^2 \{\beta + (1 - \eta) \sin \beta\} + A_2 B_8\} / A_1$$

$$A_6 = -\{(1 + \lambda^2) \sin \beta (1 - \cosh \lambda \beta) / \lambda - \eta (\sinh \lambda \beta \cos \beta - \lambda \cosh \lambda \beta \sin \beta)\} / \eta (\sin \beta - \beta)$$

$$A_7 = \{(1 + \lambda^2) \sin \beta \sinh \lambda \beta / \lambda + \eta (\cosh \lambda \beta \cos \beta - \lambda \sinh \lambda \beta \sin \beta - 1)\} / \eta (\sin \beta - \beta)$$

$$S_1 = A_6 D_1 + A_7 B_1, \quad S_2 = A_6 D_2 + A_7 B_2, \quad S_3 = A_6 D_3 + A_7 B_3 + 1 / (\sin \beta - \beta)$$

$$S_4 = A_6 D_4 + A_7 B_4 + R_5 \sin \beta / \eta (\sin \beta - \beta), \quad S_5 = A_6 D_5 + A_7 B_5, \quad S_6 = A_6 D_6 + A_7 B_6 + \sin \beta / (\sin \beta - \beta)$$

$$S_7 = A_6 D_7 + A_7 B_7 - \cos \beta / (\sin \beta - \beta), \quad S_8 = A_6 D_8 + A_7 B_8 - R_5 \sin \beta / \eta (\sin \beta - \beta) + R_5 \sin \beta / (\sin \beta - \beta)$$

$$A_8 = (1 - \cos \beta) / \sin \beta, \quad A_9 = (1 + \lambda^2)(1 - \cosh \lambda \beta) / \lambda \eta \sin \beta, \quad A_{10} = -(1 + \lambda^2) \sinh \lambda \beta / \lambda \eta \sin \beta$$

$$F_k = A_8 S_k + A_9 D_k + A_{10} B_k \quad (k = 1, 2, 3, 5, 6, 7)$$

$$\bar{F}_4 = A_8 S_4 + A_9 D_4 + A_{10} B_4 - R_5 / \eta \sin \beta, \quad \bar{F}_8 = A_8 S_8 + A_9 D_8 + A_{10} B_8 + R_5 / \eta \sin \beta$$

$$A_{11} = \sin^2 \beta, \quad A_{12} = -(\beta - \sin \beta \cos \beta), \quad A_{13} = -(\sinh \lambda \beta \cos \beta - \lambda \cosh \lambda \beta \sin \beta), \quad A_{14} = -(\cosh \lambda \beta \cos \beta - \lambda \sinh \lambda \beta \sin \beta)$$

$$T_k = A_{11} F_k + A_{12} S_k + A_{13} D_k + A_{14} B_k \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5) \quad T_6 = A_{11} \bar{F}_6 + A_{12} S_6 + A_{13} D_6 + A_{14} B_6 - \sin \beta$$

$$T_7 = A_{11} \bar{F}_7 + A_{12} S_7 + A_{13} D_7 + A_{14} B_7 + \cos \beta, \quad T_8 = A_{11} \bar{F}_8 + A_{12} S_8 + A_{13} D_8 + A_{14} B_8 - R_5 \sin \beta$$

$$H_k = -\cot \beta T_k - \beta F_k - \beta \cot \beta S_k - (\sinh \lambda \beta / \sin \beta) D_k - (\cosh \lambda \beta / \sin \beta) B_k \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8)$$

$$H_7 = -\cot \beta T_7 - \beta F_7 - \beta \cot \beta S_7 - (\sinh \lambda \beta / \sin \beta) D_7 - (\cosh \lambda \beta / \sin \beta) B_7 + 1 / \sin \beta$$

$$A_{15} = -R_5 \{\beta \cos \beta + (1 - \eta) \sin \beta\}, \quad A_{16} = R_5 \{\beta \sin \beta - (1 - \eta) \cos \beta\}$$

$$P_k = -R_5 \cos \beta H_k + R_5 \sin \beta T_k + A_{15} F_k + A_{16} S_k + (R_5 \cosh \lambda \beta / \lambda) D_k + (R_5 \sinh \lambda \beta / \lambda) B_k \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8)$$

$$P_6 = -R_5 \cos \beta H_6 + R_5 \sin \beta T_6 + A_{15} F_6 + A_{16} S_6 + (R_5 \cosh \lambda \beta / \lambda) D_6 + (R_5 \sinh \lambda \beta / \lambda) B_6 + R_5$$

$$A_{17} = -R_5 (\beta \sin \beta + \eta \cos \beta), \quad A_{18} = -R_5 (\beta \cos \beta - \eta \sin \beta), \quad A_{19} = R_5 \sinh \lambda \beta / \lambda^2, \quad A_{20} = R_5 \cosh \lambda \beta / \lambda^2$$

$$Q_k = -\beta P_k - R_s \sin \beta H_k - R_s \cos \beta T_k + A_{17} F_k + A_{18} S_k + A_{19} D_k + A_{20} B_k \quad (k=1, 2, 3, 4, 6, 7, 8)$$

$$Q_5 = -\beta P_5 - R_s \sin \beta H_5 - R_s \cos \beta T_5 + A_{17} F_5 + A_{18} S_5 + A_{19} D_5 + A_{20} B_5 + 1$$

以上の操作によって $C_1 \sim C_8$ の係数が求まる。

次に剛性マトリックス $[K]$ の要素は、式(13)となる。

$$\left. \begin{aligned} K_{1k} &= -\frac{GJ_r}{R_s^2} \frac{P_k}{R_s}, & K_{2k} &= -\frac{EJ_y}{R_s} (2-\eta) F_k, & K_{3k} &= -\frac{GJ_r}{R_s} \left(\eta \frac{1+\lambda^2}{\lambda^2} S_k - \frac{1}{R_s} P_k \right) \\ K_{4k} &= -\frac{EJ_r}{R_s^2} \left\{ (1+\lambda^2) B_k + \eta F_k \right\}, & K_{5k} &= \frac{GJ_r}{R_s^2} \cdot \frac{P_k}{R_s} \\ K_{6k} &= -\frac{EJ_y}{R_s} \left\{ (2-\eta) \sin \beta S_k - (2-\eta) \cos \beta F_k \right\}, & K_{7k} &= \frac{GJ_r}{R_s} \left\{ \frac{1+\lambda^2}{\lambda^2} \eta \cos \beta S_k + \frac{1+\lambda^2}{\lambda^2} \eta \sin \beta F_k - \frac{P_k}{R_s} \right\} \\ K_{8k} &= \frac{EJ_r}{R_s^2} \left\{ (1+\lambda^2) \sin \lambda \beta \cdot D_k + (1+\lambda^2) \cos \lambda \beta \cdot B_k - \eta \sin \beta S_k + \eta \cos \beta F_k \right\} \end{aligned} \right\} (13)$$

($k=1, \dots, 8$)

4. 数値計算例

図-2(a)のような断面をもった図-2(b)のような円弧2径間連続桁に垂直力が作用した場合のD点の垂直変位影響線を計算すると図-2(c)になる。支点A及びCは、曲げに対し単純支持、それぞれに対し回転不能で曲げねじれモーメント0、支点Bは曲げに対し連続支持、それぞれに対し回転不能で曲げねじれモーメントは0でない。

$$J_y = 1,682,133 \text{ cm}^4, \quad J_r = 6,520 \text{ cm}^4, \quad J_w = 3 \times 10^8 \text{ cm}^6$$

$$\lambda = 5.7906, \quad r = 688.8782$$

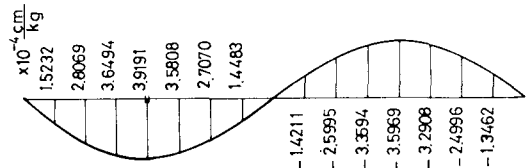
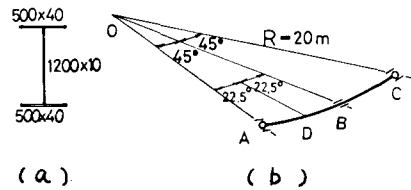
5. あとがき

数値計算例で示したように著者らが誘導した曲げねじれを考慮した薄肉曲線桁の剛性マトリ

ックス法による結果は、文献(3)のいろいろな応力法によるそれと全く一致した。この方法によると薄肉変断面曲り梁を含む骨組構造物のより正確な解析が可能となる。今後これらに関連して幾つか発表する予定である。

参考文献

- 1) G. Becker; Ein Beitrag zur statischen Berechnung beliebig gelagerter ebener gekrümmter Stäbe mit einfach symmetrischen dünnwandigen offenen Profilen von in Stabachse veränderlichem Querschnitt unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion. Der Stahlbau, Heft 11, Heft 12, 1965
- 2) 深沢 泰晴; 薄肉曲線桁の静力学的解析に関する基礎理論, 土木学会論文集第110号(1964, 10)
- 3) 渡辺 昇; 曲線桁の理論と計算, 技報堂



(c) Deflection Influence Line

図-2