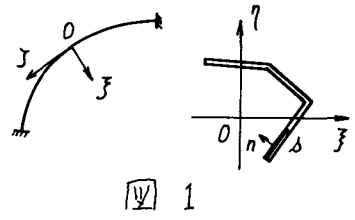


長崎大 正 築地恒夫
 " 神代律子

薄肉断面を有する一平面内で曲った曲線ばりのうち、曲率半径一定の円弧状ばりの解析については従来多くの研究がある^{(1),(2)}。しかし最近実用面から曲率が変化する構造が要求されるようになって来た。そこで、曲率ばりの長方向座標のべき級数で表わされるような薄肉断面の曲線ばりに静荷重が作用した場合の一般的応力解析法を示し、応用例として圆心線がプロソイド曲線となる曲線ばりに代表的荷重が作用した場合の解析を行なった。

解析に必要な基礎式 ばりの断面寸法はばりの全長に比べて曲率半径 $R(\eta)$ に比較して充分小さく、曲率 $1/R$ も小さい場合を取扱う。座標は圆心線に沿って η 軸、曲率中心方向に γ 軸、 γ 軸を η 軸と右手系をなすように定める(図1参照)。圆心の γ, η 方向の変位を u, v, w 、断面の η 軸まわりの回転角を θ とし、これらも微小であるとす。



任意断面の曲げモーメント M_η, M_γ 、曲げねじりモーメント M_θ 、ねじりモーメント M_γ は次の通りである。

$$M_\eta = -\int_A \sigma_\eta \eta dA = EI_\eta \frac{d^2 u}{d\eta^2} + EI_{\eta\gamma} \left(\frac{d^2 v}{d\eta^2} - K_\eta \theta \right) + EI_{\theta\eta} \frac{d\theta}{d\eta}$$

$$M_\gamma = \int_A \sigma_\gamma \gamma dA = -EI_{\gamma\eta} \frac{d^2 u}{d\eta^2} - EI_\gamma \left(\frac{d^2 v}{d\eta^2} - K_\eta \theta \right) - EI_{\theta\gamma} \frac{d\theta}{d\eta}$$

$$M_\theta = \int_A \sigma_\gamma \theta dA = -EI_{\theta\eta} \frac{d^2 u}{d\eta^2} - EI_{\theta\gamma} \left(\frac{d^2 v}{d\eta^2} - K_\eta \theta \right) - EI_{\theta\theta} \frac{d\theta}{d\eta}$$

$$M_\gamma = \frac{dM_\theta}{d\eta} + GJT\theta$$

(1) a, b, c, d

ここで、 σ_η は η 方向垂直応力、 E, G は材料定数、 K_η は曲率、 θ は断面の圆心に関する曲げねじれ角、 $I_\eta, I_\gamma, I_{\eta\gamma}, I_{\theta\eta}, I_{\theta\gamma}, I_{\theta\theta}, J$ は断面定数で次のように定義する。

$$I_\eta = \int_A \eta^2 dA, I_\gamma = \int_A \gamma^2 dA, I_{\eta\gamma} = \int_A \eta\gamma dA, I_{\theta\eta} = \int_A \eta \theta dA, I_{\theta\gamma} = \int_A \gamma \theta dA, I_{\theta\theta} = \int_A \theta^2 dA$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i t_i^3, A = \int_A dA$$

また、 v, u は γ, η 軸まわりの変位角、 θ は η 軸まわりのねじれ率であり、変位により(2)式で表わされる。
 $v = \frac{dv}{d\eta}, u = \frac{du}{d\eta} + K_\eta w, \theta = \frac{d\theta}{d\eta} + K_\eta \frac{dv}{d\eta}$ (2)

外力として、断面内の点 (γ_0, η_0) に作用する η, γ, θ 方向分布荷重 $\bar{P}_\eta, \bar{P}_\gamma, \bar{P}_\theta$ 、 η, γ 軸まわりに作用する分布モーメント $\bar{m}_\eta, \bar{m}_\gamma, \bar{m}_\theta$ を考へる。 η, γ 軸方向の力の釣合、 η 軸まわりのねじりモーメントの釣合式は次のようになる。

$$\frac{dP_\eta}{d\eta} + K_\eta P_\eta + \bar{P}_\eta + \eta_0 \frac{d\bar{P}_\eta}{d\eta} - \frac{d\bar{m}_\eta}{d\eta} = 0 \quad \frac{dP_\gamma}{d\eta} + \bar{P}_\gamma + \eta_0 \frac{d\bar{P}_\gamma}{d\eta} + \frac{d\bar{m}_\gamma}{d\eta} = 0$$

$$\frac{dP_\theta}{d\eta} - K_\eta P_\theta + \bar{P}_\theta + K_\eta \bar{m}_\theta = 0 \quad \frac{dM_\eta}{d\eta} - K_\eta M_\eta + \bar{m}_\eta + \eta_0 \bar{P}_\eta - \eta_0 \bar{P}_\gamma = 0$$

(3) a, b, c, d

ここで、 P_η, P_γ は η, γ 方向剪断力、 P_θ は η 軸方向垂直力でそれぞれ次の式で表わされる。

$$P_\eta = -\frac{dM_\eta}{d\eta}, P_\gamma = \frac{dM_\gamma}{d\eta} + K_\eta M_\gamma, P_\theta = EA \left(\frac{d\theta}{d\eta} - K_\eta u \right)$$

(4) a, b, c

解析方法 以上の基礎式を、与えられたばり寸法、材質、荷重状態、境界条件 α もとで解くため

に位連マトリックス法を用いる。先ず基礎式を無次元化する。断面の代表寸法を \$a\$ とすれば、

$$\bar{u} = \frac{u}{a}, \quad \bar{v} = \frac{v}{a}, \quad \bar{w} = \frac{w}{a}, \quad \bar{\theta} = \theta; \quad \bar{f} = \frac{f}{a}, \quad \bar{r} = \frac{r}{a}, \quad \bar{\theta} = \frac{\theta}{a}, \quad L = \frac{L}{a}, \quad \bar{a} = \frac{a}{a}$$

$$\bar{I}_u = \frac{I_u l^3}{a^3}, \quad \bar{I}_v = \frac{I_v l^3}{a^3}, \quad \bar{I}_\theta = l I_\theta; \quad \bar{P}_f = \frac{P_f l^3}{EI_1 a}, \quad \bar{P}_r = \frac{P_r l^3}{EI_1 a}, \quad \bar{P}_\theta = \frac{P_\theta l^3}{EI_2 a}$$

$$\bar{M}_f = \frac{M_f l^2}{EI_1 a}, \quad \bar{M}_r = \frac{M_r l^2}{EI_1 a}, \quad \bar{M}_\theta = \frac{M_\theta a l^2}{EI_\theta}, \quad \bar{M}_\theta = \frac{M_\theta l^2}{EI_\theta}$$

$$\bar{Q}_f = \frac{Q_f l^2}{EI_1 a}, \quad \bar{Q}_r = \frac{Q_r l^2}{EI_1 a}, \quad \bar{Q}_\theta = \frac{Q_\theta l^2}{EI_1 a}; \quad \bar{m}_f = \frac{\bar{m}_f l^2}{EI_1 a}, \quad \bar{m}_r = \frac{\bar{m}_r l^2}{EI_1 a}, \quad \bar{m}_\theta = \frac{\bar{m}_\theta a l^2}{EI_\theta}$$

$$\bar{A} = \frac{A}{a^2}, \quad \bar{J} = \frac{J}{a^4}, \quad \bar{I}_f = \frac{I_f}{a^2}, \quad \bar{I}_r = \frac{I_r}{a^2}, \quad \bar{I}_{\theta f} = \frac{I_{\theta f}}{a^2}, \quad \bar{I}_{\theta r} = \frac{I_{\theta r}}{a^2}, \quad \bar{I}_\theta = \frac{I_\theta}{a^2}; \quad \bar{\Phi}_1 = k_f l$$

と各量を無次元表示する。

位連マトリックス表すに必要な節長の状態量ベクトルを \$V\$ とすると、\$V\$ の成分は次の通りである。

$$V = \{ \bar{u}, \bar{v}, \bar{M}_f, \bar{P}_f, \bar{v}, \bar{I}_v, \bar{M}_r, \bar{P}_r, \bar{\theta}, \bar{I}_\theta, \bar{M}_\theta, \bar{M}_\theta, \bar{w}, \bar{P}_\theta, 1 \} \quad (5)$$

基礎方程式を無次元表示すると、

$$\frac{dV}{dL} = G V \quad (6)$$

となり、\$G\$ は(7)式を示すマトリックスである。

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{\Phi}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{u}_1 & 0 & 0 & 0 & \bar{u}_2 & 0 & \bar{u}_3 & 0 & 0 & 0 & \bar{u}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{\Phi}_1 & \bar{q}_5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{v}_1 & 0 & 0 & 0 & \bar{v}_2 & 0 & \bar{v}_3 & 0 & 0 & \bar{v}_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \bar{q}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{q}_6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{\Phi}_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\theta}_1 & 0 & 0 & 0 & \bar{\theta}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\theta}_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{q}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{q}_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{q}_2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \bar{\Phi}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{q}_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\Phi}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{q}_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \text{ここで、}$$

$$\bar{q}_1 = \frac{\bar{I}_v}{I_\theta} \bar{\Phi}_1$$

$$\bar{q}_2 = -\frac{G}{E} \frac{\bar{J}}{I_\theta} \frac{1}{a^2}$$

$$\bar{q}_3 = -\frac{\bar{I}_\theta}{I_f} \bar{\Phi}_1 \quad (7)$$

$$\bar{q}_4 = \frac{\bar{I}_r}{A} a^2$$

$$\bar{q}_5 = -\bar{Q}_f - \bar{I}_v a \frac{d\bar{Q}_f}{dL} + \frac{d\bar{m}_f}{dL}$$

$$\bar{q}_6 = -\bar{Q}_r - \bar{I}_v a \frac{d\bar{Q}_r}{dL} - \frac{d\bar{m}_r}{dL}$$

$$\bar{q}_7 = -\bar{m}_\theta - a \frac{\bar{I}_\theta}{I_\theta} (\bar{I}_v \bar{Q}_1 - \bar{I}_v \bar{Q}_7)$$

$$\bar{q}_8 = -\bar{Q}_\theta - \bar{\Phi}_1 \bar{m}_\theta$$

\$\bar{q}_1 \sim \bar{q}_4, \bar{v}_1 \sim \bar{v}_4, \bar{\theta}_1 \sim \bar{\theta}_4\$ は式(1) a, b, c より \$\frac{d\bar{u}}{dL}, \frac{d\bar{v}}{dL}, \frac{d\bar{\theta}}{dL}\$ の値を \$M_f, M_r, \theta, M_\theta\$ の関数として解いた場合の各係数を無次元表示したものである。すなわち

$$\begin{pmatrix} \frac{d\bar{u}}{dL} \\ \frac{d\bar{v}}{dL} \\ \frac{d\bar{\theta}}{dL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3 & \bar{u}_4 \\ \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 & \bar{v}_4 \\ \bar{\theta}_1 & \bar{\theta}_2 & \bar{\theta}_3 & \bar{\theta}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{M}_f \\ \bar{M}_r \\ \bar{\theta} \\ \bar{M}_\theta \end{pmatrix} \quad (8)$$

\$G\$ の要素の内、\$\bar{\Phi}_1\$ が \$L\$ のべき級数で表わされる場合には、\$G\$ もまた \$L\$ のべき級数で表わされる。

$$G = G_0 + G_1 L + G_2 L^2 + G_3 L^3 + \dots \quad (9)$$

いま(6)式が積分出来たとし、位連マトリックス \$A\$ が存在するとする。すると \$L\$ 断面の状態量は

$$V(L) = (A_0 + A_1 L + A_2 L^2 + A_3 L^3 + \dots) V(0) \quad (10)$$

よりおける。(10)式を(6)式に代入して

$$(A_1 + 2A_2 L + 3A_3 L^2 + \dots) V(0) = (G_0 + G_1 L + G_2 L^2 + G_3 L^3 + \dots)(A_0 + A_1 L + A_2 L^2 + \dots) V(0)$$

L の同ベキの係数を比較すると、

$$A_1 = G_0 A_0, \quad 2A_2 = G_0 A_1 + G_1 A_0, \quad 3A_3 = G_0 A_2 + G_1 A_1 + G_2 A_0, \dots, \quad n A_n = G_0 A_{n-1} + G_1 A_{n-2} + \dots + G_{n-1} A_0. \quad (11)$$

となり、伝達マトリックス A の各項が順番に決まる⁽⁴⁾。ここで $A_0 = I$ である。

伝達マトリックスが決ると、はり両端の状態ベクトル間には次の伝達方程式が成り立つ。

$$V(L) = A V(0) \quad (12)$$

与えられた境界条件の下で、(12)式より未知状態量を求める方法は次の通りである。

$L=0$ 断面での未知状態量ベクトルを X_0 とし、これらの状態量を指定するマトリックスを K とすると

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = K^T V(0) \quad (13)$$

である。

$L=L=1$ 断面で与えられている状態量を X_1 とし、これらを指定するマトリックスを L とすると、 X_0 と X_1 の間には (4) 式の関係がある。

$$X_1 = L^T A K \begin{bmatrix} X_0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = [D_1 \mid D_2] \begin{bmatrix} X_0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = D_1 X_0 + D_2 \quad (14)$$

これより、

$$X_0 = D_1^{-1} (X_1 - D_2) \quad (15)$$

(15)式より $L=0$ 断面での未知状態量が求めれば、任意断面の状態量は (10) 式より計算出来る。

応力 断面の状態量がわかれば、その断面の垂直応力、剪断応力は次式より求まる。

(i) 垂直応力 $\bar{\sigma}_y$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_y}{E} = \bar{\alpha}^2 \left[\bar{\alpha} \frac{\bar{I}_y}{A} \bar{P}_y - \bar{\gamma} \frac{d\bar{u}}{dL} - \bar{\gamma} \left(\frac{d\bar{v}}{dL} - \bar{\Phi}_y \frac{1}{\alpha} \bar{\theta} \right) - \bar{\Theta} \frac{d\bar{t}_\theta}{dL} \right] \quad (16)$$

$\frac{d\bar{u}}{dL}, \frac{d\bar{v}}{dL}, \frac{d\bar{t}_\theta}{dL}$ は (8) 式より計算される。

(ii) St. Venant のねじりによる剪断応力 $\bar{\tau}_s$

$$\bar{\tau}_s = \frac{\tau_s}{E} = -2 \frac{G}{E} \bar{\alpha} \bar{n} \bar{t}_\theta \quad \text{ここで、} \bar{n} = \frac{r}{\alpha} \quad (\text{図1参照}) \quad (17)$$

(iii) $\bar{\sigma}_y$ に伴う剪断応力 $\bar{\tau}_y$ (開き断面の場合)⁽²⁾

$$\bar{\tau}_y = \frac{\tau_y}{E} = \frac{\bar{\alpha}^3}{E} \left[\bar{S}_y \frac{d^2 \bar{u}}{dL^2} + \bar{S}_y \frac{d}{dL} \left(\frac{d\bar{v}}{dL} - \bar{\Phi}_y \frac{1}{\alpha} \bar{\theta} \right) + \bar{S}_\theta \frac{d^2 \bar{t}_\theta}{dL^2} \right] \quad (18)$$

ここで、 \bar{t} は断面の肉厚、 $S_f = \int_0^a f(x) t ds$ で関数 $f(x)$ の断面中央面に沿う積分を示す。 $\frac{d^2 \bar{u}}{dL^2}$ 、 $\frac{d}{dL} \left(\frac{d\bar{v}}{dL} - \bar{\Phi}_y \frac{1}{\alpha} \bar{\theta} \right)$ 、 $\frac{d^2 \bar{t}_\theta}{dL^2}$ は式 (4) a, b と式 (1) d よりたゞ連立方程式の解である。

$$\begin{aligned} \bar{I}_y \frac{d^2 \bar{u}}{dL^2} + \bar{I}_{y1} \frac{d}{dL} \left(\frac{d\bar{v}}{dL} - \bar{\Phi}_y \frac{1}{\alpha} \bar{\theta} \right) + \bar{I}_{\theta y} \frac{d^2 \bar{t}_\theta}{dL^2} &= -\bar{I}_y \bar{P}_y \\ \bar{I}_y \frac{d^2 \bar{u}}{dL^2} + \bar{I}_y \frac{d}{dL} \left(\frac{d\bar{v}}{dL} - \bar{\Phi}_y \frac{1}{\alpha} \bar{\theta} \right) + \bar{I}_{\theta y} \frac{d^2 \bar{t}_\theta}{dL^2} &= -\bar{I}_y \bar{P}_y + \bar{I}_{\theta y} \bar{M}_y \\ \bar{I}_{\theta y} \frac{d^2 \bar{u}}{dL^2} + \bar{I}_{\theta y} \frac{d}{dL} \left(\frac{d\bar{v}}{dL} - \bar{\Phi}_y \frac{1}{\alpha} \bar{\theta} \right) + \bar{I}_\theta \frac{d^2 \bar{t}_\theta}{dL^2} &= -\frac{1}{\alpha} \bar{I}_\theta \bar{M}_y + \frac{G}{E} \frac{\bar{J}}{\alpha^2} \bar{t}_\theta \end{aligned} \quad (19)$$

解析例 同心線がプロソイド曲線となる薄肉の滑り断面のほりを考へる (図2参照)。L=1 断面での曲率半径 R を一定とし、はりの長さ $l/R = \pi/2$ 、すなわち半径 R の 1/4 円弧はりの長さ l に等しい。その他の寸法は $q/R = 1/10$ 、 $q/l = 1/5\pi$ 、 $b/a = 1/2$ 、 $t_1/a = 1/20$ 、 $t_2/a = 1/10$ であり、曲率

は $\bar{\sigma}_y = \lambda L + \frac{\pi}{2} - L$ (λ は フロソイド係数) で表わされる。

境界条件は次の通り。

$L = 0$ 断面で、

$$\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = \bar{\theta} = \bar{\theta}_0 = \bar{\omega} = 0$$

$L = l$ 断面で、

$$\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = \bar{\theta} = \bar{\theta}_0 = 0, \quad \bar{P}_y = 0$$

荷重は断面の圆心に $\bar{Q}_y = -1$ の等分布荷重のみが作用する。

図3に $\lambda = \frac{\pi}{2}$ の場合の各断面内応力分布を示す。St. Venant の剪断応力は断面の外側での応力である。図中 ---- は円弧はりと同じ荷重が作用した場合の応力である。

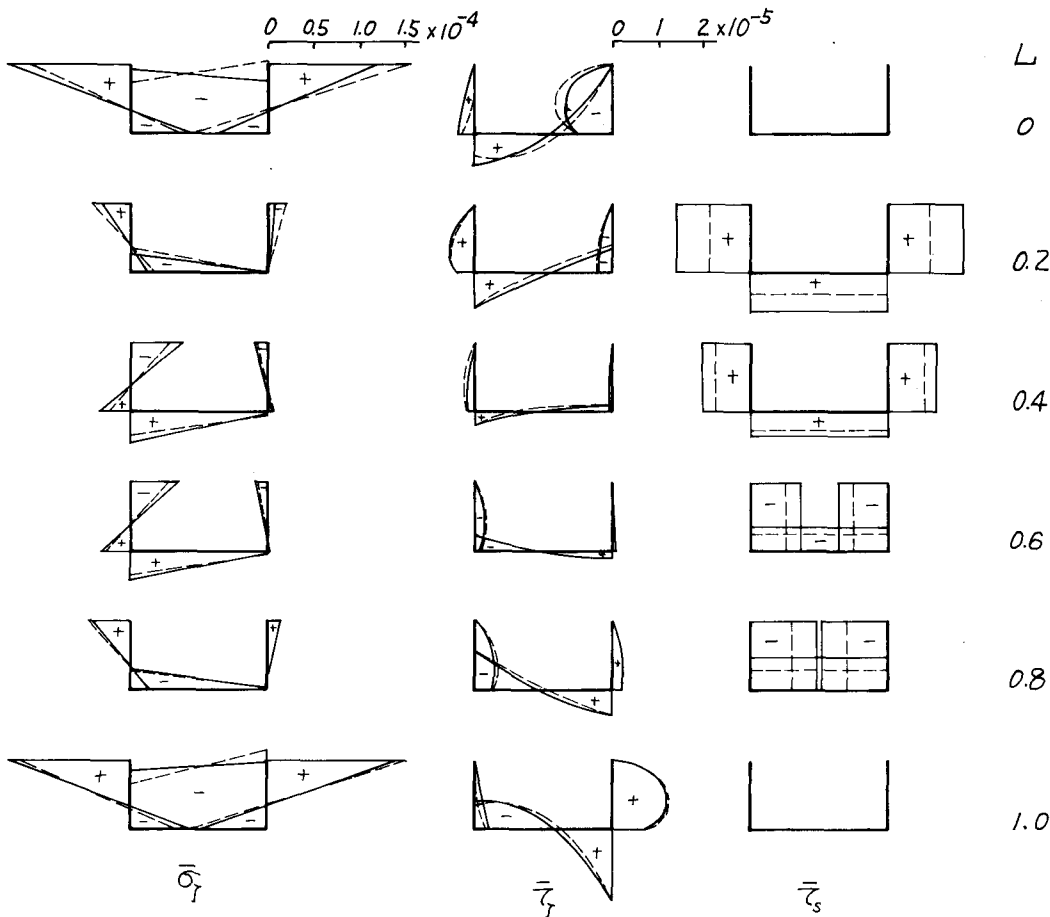
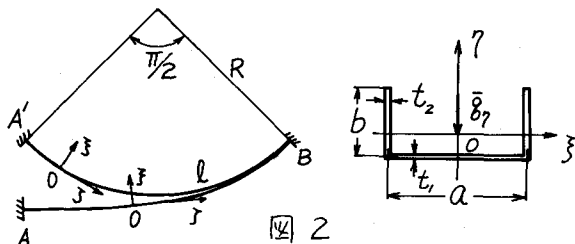


図 3 断面内応力分布

文献 (1) 小西一郎, 小松定夫: 曲線曲線杆の基礎理論, 工学会論文集 87号 B637
 (2) 澤沢泰晴: 薄肉曲線杆の静力学の解析に因り基礎理論, 工学会論文集 110号 B839
 (3) K. Washizu: Some Considerations on a Naturally Curved and Twisted Slender Beam, Journal of Math & Physics Vol. XLIII 1964.
 (4) D. Reuschling: Dissertation 1967.