

東北大学工学部 正員 佐武正雄
 東北大学工学部 正員 岸野佑次

1. まえがき

通常の弾性理論では表わされない自由度を扱ったものに、回転が独立であるとする Cosserat に始まる Generalized Continua の理論があり、それは Schaefer¹⁾, Kröner²⁾, 近藤³⁾ らによって不適合度或は微視的自由度を考慮した塑性力学に应用された。ここでは微視的な自由度を表わす量として、応力と歪が Hooke の法則に従わないような付加的な変形の過程で生ずる一つのテンソル量を定義し、そのテンソルが歪エネルギーの増分、変形に伴う異方的性質やモーメントを表現していることを示し、更にカップルストレスを考慮した降伏理論⁴⁾⁵⁾との関係およびその3次元空間での応用例を示す。

2. 微視的な自由度の表現について

近藤教授が微視的に不均質な材料に対して導入した自由度の表現方法³⁾は変形後の2点を結ぶベクトル R が巨視的平均値 \bar{R} とそれからずれた r とに分かれ、この r の向きが $\omega = \gamma \Delta$ であることに基礎をおいている。今2点間の距離を dS とし、 dS^2 の平均をとると、

$$\overline{dS^2} = \overline{(R+r) \cdot (R+r)} = \overline{R \cdot R} + 2\overline{R \cdot r} + \overline{r \cdot r} = \overline{R \cdot R} + \overline{r \cdot r} \quad (2.1)$$

となり、 $\overline{dS^2}$ に着目すれば、ピタゴラスの定理により r は \bar{R} と直交していることになり、 r と2点を結ぶベクトルが平均的に \bar{R} で与えられる3次元 Euclid 空間に直交させて考えることができる。教授はこの r を新しい座標軸にとり、こうして得られる高次元空間(3次元 Riemann 空間)への曲がり出しとして塑性の表現を行っている。この表現方法によれば歪空間の不適合度を自由度を表わすことになるが、本論文では特に歪の不適合度を導入することなく、応力と歪との相互関係に自由度をもたせた場合について考察を進めることとする。今 Hooke の法則 $\bar{\sigma}^{ij} = E^{ijkl} \bar{\epsilon}_{kl}$ を満たす平均的な応力 $\bar{\sigma}^{ij}$ と平均的な歪 $\bar{\epsilon}_{kl}$ から、微視的な自由度による応力と歪の増分 $\delta \sigma^{ij}$, $\delta \epsilon_{kl}$ が生じたとき、単位体積当りの歪エネルギー w は

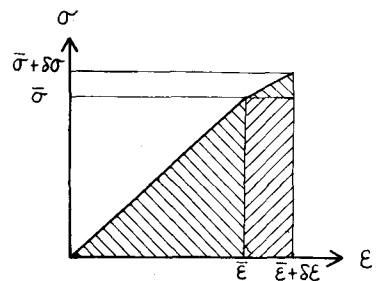


図 - 1

$$w = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^{ij} \bar{\epsilon}_{ij} + \delta w = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^{ij} \bar{\epsilon}_{ij} + \bar{\sigma}^{ij} \delta \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \delta \sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} \quad (2.2)$$

となる(図-1)。w の平均をとると、 $\bar{\sigma}^{ij} \delta \epsilon_{ij}$ は消えてしまうが、 $\delta \sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij}$ は $\delta \sigma^{ij}$ と $\delta \epsilon_{ij}$ とに相関関係があれば消えないで残る項である。このことは(2.1)式と対応して興味深いことであるが、ここでは $\delta \sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij}$ が $\bar{\sigma}^{ij} \delta \epsilon_{ij}$ に比し微小であると見做し、後者の場所による変化そのものを問題にすることとする。従って、 $\delta \sigma^{ij} \ll \bar{\sigma}^{ij}$ なら、

$$\delta W \doteq \bar{\sigma}^{ij} \delta \varepsilon_{ij} \quad (2.3)$$

とおける。歪エネルギーはスカラー量であるが、材料が微視的な構造を持つことから、この材料中にエネルギーが何等かの方向性を持って蓄えられ、この方向性が弾性限界を超えた時の材料の力学的性質に大きな影響を及ぼすものと考えられる。ここでは以下に示すようなテンソルがエネルギー蓄積の仕方に関係がある一つの量と思われるのでこれについて考察する。

$$T_s^{ij} = \bar{\sigma}^{ki} \delta \varepsilon_{kj} \quad (2.4)$$

ここに $\delta \varepsilon_{kj}$ は (4.1) 式で定義される非対称増分歪であり、対称増分歪 $\delta \varepsilon_{kj}$ との関係は次式で与えられる。

$$\delta \varepsilon_{kj} = \delta \delta_{(kj)} \quad (2.5)$$

3. テンソル T_s^{ij} について

T_s^{ij} は一般に非対称テンソルとなるので、これを対称部分 T_s^{ij} と反対称部分 T_A^{ij} とに分けて考へる。

$$T_s^{ij} = T_s^{ij} + T_A^{ij} \quad (3.1)$$

(2.3), (2.4), (2.5) 式より

$$T_s^{ii} = T_s^{ii} = \bar{\sigma}^{ki} \delta \varepsilon_{ki} = \bar{\sigma}^{ki} \delta \varepsilon_{ki} = \delta W \quad (3.2)$$

であるから、テンソル T_s^{ij} のトレースが歪エネルギーの増分を表わす。一オ T_s^{ij} の偏差部分は $T_{1,1}, T_{2,2}, T_{3,3}$ が各座標軸方向の応力成分(直応力及び剪断力)によるエネルギーの和を表わしているので、エネルギー増分が材料に蓄えられる際の方向性(異方性)を示すと考へられる。 T_s^{ij} は一般に $\bar{\sigma}^{ij}$ や $\delta \varepsilon_{kl}$ とは異なる主軸を持つ。今、座標軸を応力の主軸方向にとり、主応力を $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3$ で表わすと、次式のようになる。

$$T_s^{ij} = \delta^{ik} \bar{\sigma}_{(i)} \delta \varepsilon_{kj} \quad (3.3)$$

上式中 () の中の指標 i については和をとらないこととする。今、増分歪の主軸が応力の主軸と一致するとし、主歪を $\delta \varepsilon_1, \delta \varepsilon_2, \delta \varepsilon_3$ とすれば

$$T_s^{ij} = \delta^{ik} \bar{\sigma}_{(i)} \delta \varepsilon_{kj} \delta \varepsilon_{(j)} = \delta_{ij}^i \bar{\sigma}_{(i)} \delta \varepsilon_{(i)} \quad (3.4)$$

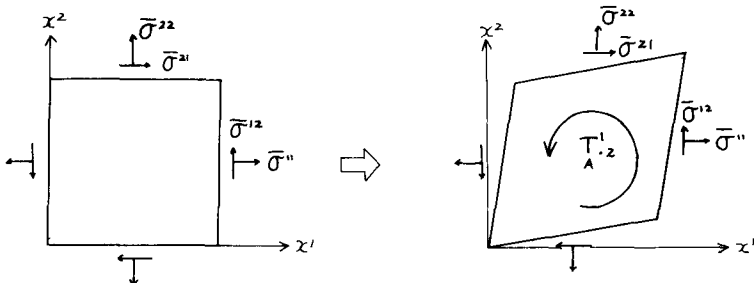


図-2

となるので、 T_{ij}^i の主軸も応力、増分歪の主軸と一致するが、応力の主軸と増分歪の主軸が異なる場合は一般に T_{ij}^i の主軸はそれらと異った方向となる。

T_{ij}^i は $\delta\delta_{ki}$ の発生時に $\bar{\sigma}^{ki}$ の大きさと向きとが変化しないと仮定するとモーメントを表わすと考えられる⁵⁾(図-2)。

4. カップルストレスを考慮した降伏理論の応用

増分歪 $\delta\delta_{ki}$ は変位 u^i を用いて

$$\delta\delta_{ki} = \delta_{ij} \partial_k u^j \quad (4.1)$$

のように表わされる。この時、 T_{ij}^i は次のようになる。

$$T_A^i = \delta_{jkl} T_A^{jkl} = \delta_{jkl} \bar{\sigma}^{kl} \partial_i u^j \quad (4.2)$$

このモーメントに対しカップルストレスが抵抗すると考えると次の固有条件とよばれる方程式を得る⁵⁾。

$$\epsilon_{ijk} (D \Delta \partial^j u^k + \bar{\sigma}^{lk} \partial_l u^j) = 0 \quad (4.3)$$

ここに D はカップルストレスの弾性定数、 $\Delta = \delta^{ij} \partial_i \partial_j$ である。

3次元の一樣応力状態にこの方程式を応用する。座標軸を応力の主軸方向にとり、(4.3)式に於ける添字 i が1, 2, 3となる各方程式にそれぞれ $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ を施すと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} D \Delta Y - \bar{\sigma}_3 Y &= D \Delta Z - \bar{\sigma}_2 Z \\ D \Delta Z - \bar{\sigma}_1 Z &= D \Delta X - \bar{\sigma}_3 X \\ D \Delta X - \bar{\sigma}_2 X &= D \Delta Y - \bar{\sigma}_1 Y \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

ここに $X = \partial_2 \partial_3 u_1, Y = \partial_3 \partial_1 u_2, Z = \partial_1 \partial_2 u_3$ である。(4.4)式の各式を合計すると

$$(\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_3) X + (\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_1) Y + (\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2) Z = 0 \quad (4.5)$$

となる。この式と(4.4)式の一つの式から(4.4)式の他の二つの式を導びき得るので、(4.4)式は独立な式とはなっていない。そこで拘束条件を一つ必要とする。今この条件を(3.2)式に示した増分歪の発生に伴うエネルギーが零であるとすると、この条件式は X, Y, Z を用いて

$$\bar{\sigma}_1 \partial_1 \partial_2 X + \bar{\sigma}_2 \partial_2 \partial_2 Y + \bar{\sigma}_3 \partial_3 \partial_3 Z = 0 \quad (4.6)$$

と書ける。(4.4), (4.5), (4.6)式より

$$D \Delta (\bar{\sigma}_1 \partial_1 \partial_2 X + \bar{\sigma}_2 \partial_2 \partial_2 X + \bar{\sigma}_3 \partial_3 \partial_3 X) - (\bar{\sigma}_1^2 \partial_1 \partial_1 X + \bar{\sigma}_2^2 \partial_2 \partial_2 X + \bar{\sigma}_3^2 \partial_3 \partial_3 X) = 0 \quad (4.7)$$

ここで、 X が次のような階乗関数で表わされるとする。

$$X = c \sin \alpha (x^1 - a) \sin \beta (x^2 - b) \sin \delta (x^3 - c) \quad (4.8)$$

ここに、 $c, \alpha, \beta, \delta, a, b, c$ は定数である。

(4.8)式を(4.7)式に代入すると(4.7)式が零でない解を持つのは次の条件を満たす時に限られる。

$$\alpha^2(\bar{\sigma}_1 + p)^2 + \beta^2(\bar{\sigma}_2 + p)^2 + \delta^2(\bar{\sigma}_3 + p)^2 = k^2 \quad (4.9)$$

但し

$$p = \frac{D}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2), \quad k = \frac{D^2}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2)^3$$

α, β, δ, D が応力の関数であると考えられる場合には、(4.9)式は拡張 von Mises の降伏条件式に類似のより一般的な降伏条件式を表わすと考えられる。

5. あとがき

4節に述べたような固有条件式が導かれるのは平均応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ の主軸と増分歪 $\delta\epsilon_{ij}$ の主軸とが異なる場合であり、従って T_{ij}^* の主軸もその独自の方向をもつことになる。材料が圧縮を受ける時に、歪の主軸が完全に応力の主軸に一致したまま変形が進むとすると、降伏応力の値は相当大きくなると考えられるが、通常の降伏はその値よりはるかに小さな値で生じ、これは例えば T_{ij}^* のような状態量によって表わされる微視的自由度により生ずると考えられる。この微視的自由度は更に材料によって異なった度合で生ずるものと思われる。特に歪エネルギーの蓄積の際の方向性が顕著であると考えられるポアソン比の小さな材料(脆性材料)に於て、ある限界の力を受けた時その方向に蓄積されたエネルギーを急激に解消するために4節に述べたような固有方程式に従う降伏現象が起ると考えられる。

本論文では微視的自由度としてテンソル T_{ij}^* を導入し、特にその反対称部分が固有条件を与える方程式に於けるモーメントを表わしていることを示した。2節に述べたように T_{ij}^* は元来平均化すれば消える量なので、その変動の周期(4節に於ける周期関数の場合の α, β, δ に相当し、材料固有の性質を表わすと思われる)など、今後 T_{ij}^* についてのより一般的な力学的意味づけを行う必要があると思われる。

参考文献

- 1) Schaefer, H.: Das Cosserat-Kontinuum, ZAMM 47 (1967), 485-498
- 2) Kröner, E.: Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen, Springer-Verlag Berlin Göttingen Heidelberg (1958)
- 3) Kondo, K.: On the Fundamental Equations of the Macroscopic Mechanical Behaviour of Microscopically Non-Uniform Materials, RAAG Memoirs 1 (1955), 470-483
- 4) Kishino, Y.: Yield Criterion Derived through the Consideration of Plastic Deformations with Couple-Stresses, Tech. Rep. Tohoku Univ. 37, 1 (1972), 61-68
- 5) 岸野, 佐武: カップルストレスを考慮した材料の降伏条件に関する考察, 土木学会第26回年次学術講演会講演集 I-4 (1971)
- 6) 吉村慶丸: 塑性力学, 応用力学講座 4-A, 共立出版 (1957), P122