I-94 応力空間における距離の概念と降伏条件に関する考察

東北大学工学部 正員 佐武正雄

1. まえがき

物体の一つの変形状態を応力や歪成分の函数空間の一つの点に対応させ，二つの状態の内積と称する量を一つの状態の応力と一つの状態の歪の成分の積和の体積積分の $\frac{1}{2}$ で表わされる歪エネルギーの形で導入し，二つの状態の距離を，その二点の応力差と歪差とからつくられる内積のルートで定義することは，物体の力学的状態をBanach空間の点としてとらえる幾何学的手法であり，弾性論における解の近似度の検討や，ＦＥＭの収斂の問題などに応用されている。[1),2),3)]

本文は，応力空間の中にさらに一般化された距離の概念を導入することによって各種の降伏条件がそれぞれある幾何学的な意味を与えられることを説明する。

2. 一般化された距離の概念による降伏条件の考察

三つの主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を座標とする3次元空間（応力空間）を考え，一つの応力状態は，この空間の一点に対応させて考察する。ここで，この空間の二点P, Qについて，その距離と称するスカラー函数 $\rho(P,Q)$ を導入するが，$\rho(P,Q)$ は次のような性質をもつものとする。

1. $\rho(P,Q) = \rho(Q,P)$ （対称性） (2·1)
2. $\rho(P,Q) \geq 0$ （非負値性） (2·2)
3. $P = Q$ （PとQとが一致）の場合に限って

$$\rho(P,Q) = 0 \qquad (2\cdot3)$$

4. $\rho(P,R) \leq \rho(P,Q) + \rho(Q,R)$ （三角不等式） (2·4)

いま，二点

$$P_1 = (\underset{1}{\sigma_1}, \underset{1}{\sigma_2}, \underset{1}{\sigma_3}), \quad P_2 = (\underset{2}{\sigma_1}, \underset{2}{\sigma_2}, \underset{2}{\sigma_3}) \qquad (2\cdot5)$$

に対し，$p \geq 1$ として

$$\rho_p(P_1, P_2) = \sqrt[p]{|\underset{1}{\sigma_1} - \underset{2}{\sigma_1}|^p + |\underset{1}{\sigma_2} - \underset{2}{\sigma_2}|^p + |\underset{1}{\sigma_3} - \underset{2}{\sigma_3}|^p} \qquad (2\cdot6)$$

と定義すれば，この定義は上述の距離の性質を満足し，[4)] p 次のMinkowski空間を形成する。

こうして導入される応力空間の一般化された距離の中で，とくに重要と思われるものは，次の二つの場合である。（前者は通常の意味の距離である）

$$\rho_2(P_1, P_2) = \sqrt{|\underset{1}{\sigma_1} - \underset{2}{\sigma_1}|^2 + |\underset{1}{\sigma_2} - \underset{2}{\sigma_2}|^2 + |\underset{1}{\sigma_3} + \underset{2}{\sigma_3}|^2} \qquad (2\cdot7)$$

$$\begin{aligned}\rho_\infty(P_1, P_2) &= \lim_{p \to \infty} \sqrt[p]{|\underset{1}{\sigma_1} - \underset{2}{\sigma_1}|^p + |\underset{1}{\sigma_2} - \underset{2}{\sigma_2}|^p + |\underset{1}{\sigma_3} - \underset{2}{\sigma_3}|^p} \\ &= \mathrm{Max}\left[|\underset{1}{\sigma_1} - \underset{2}{\sigma_1}|,\ |\underset{1}{\sigma_2} - \underset{2}{\sigma_2}|,\ |\underset{1}{\sigma_3} - \underset{2}{\sigma_3}|\right]\end{aligned} \qquad (2\cdot8)$$

降伏条件として，原点O（無応力状態）からの距離

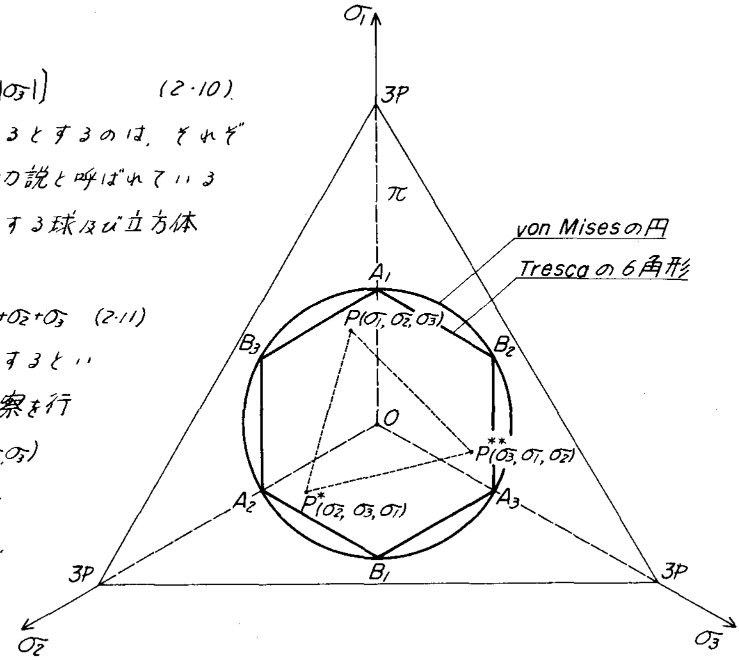
$$\rho_2(O,P) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \qquad (2\cdot9)$$

または

$$\rho_\infty(O,P) = Max\left[|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|\right] \qquad (2\cdot10)$$

がある限界値に達すると降伏がおこるとするのは，それぞれ，最大歪エネルギー説，最大主応力説と呼ばれているもので，降伏曲面は，原点を中心とする球及び立方体となる。

次に，降伏が平均応力 $P=\mathrm{tr}\,\sigma=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$ (2·11) に関係せず，主として偏差応力に依存するという考え方の立場からは，次のような考察を行うことができる。応力空間の一点 $P(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ とその座標の巡回置換によって得られる二点 $P^*(\sigma_2,\sigma_3,\sigma_1)$，$P^{**}(\sigma_3,\sigma_1,\sigma_2)$ は，静水圧軸 $\rho\,(\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3)$ に垂直な平面 π 上にある正三角形をつくる（図－1）。したがって，いまその辺の長さ



図－1.

$$\rho_2(P,P^*) = \sqrt{|\sigma_1-\sigma_2|^2+|\sigma_2-\sigma_3|^2+|\sigma_3-\sigma_1|^2} \qquad (2\cdot12)$$

または，

$$\rho_\infty(P,P^*) = Max\left[|\sigma_1-\sigma_2|, |\sigma_2-\sigma_3|, |\sigma_3-\sigma_1|\right] \qquad (2\cdot13)$$

がある限界値に達すると降伏がおこると考えれば，これらはよく知られた von Mises（最大剪断歪エネルギー説）及び Tresca（最大剪断応力説）の降伏条件となる。これらの降伏条件は，上述の定義による正三角形の辺長が平均応力 P に無関係となる性質から，その降伏曲面は静水圧軸 ρ を中心軸とする円柱及び正六角柱となっている。最後に，やゝ複雑な距離を導入することによって，Mohr－Coulomb の降伏条件に一つの意味付けを与えることができることを示そう。(2·5) 式に示す二点 P_1, P_2 の距離として

$$\rho_M(P_1,P_2) = Max\left[\left|\frac{{}_1\sigma_1-{}_2\sigma_1}{{}_1\sigma_1+{}_2\sigma_1}\right|, \left|\frac{{}_1\sigma_2-{}_2\sigma_2}{{}_1\sigma_2+{}_2\sigma_2}\right|, \left|\frac{{}_1\sigma_3-{}_2\sigma_3}{{}_1\sigma_3+{}_2\sigma_3}\right|\right] \qquad (2\cdot14)$$

を導入する。ただし，この場合 P_1, P_2 の座標である6個の主応力はすべて同符号であるとする。(2·14) 式の定義も，距離の性質 (2·1)～(2·4) 式を満足していることは容易に証明される。さて，この距離の定義を用いて，前述の正三角形 PP^*P^{**} の辺長を考えれば，

$$\rho_M(P,P^*) = Max\left[\left|\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right|, \left|\frac{\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_2+\sigma_3}\right|, \left|\frac{\sigma_3-\sigma_1}{\sigma_3+\sigma_1}\right|\right] \qquad (2\cdot15)$$

となり，これがある限界値に達すると降伏がおこるとするのが Mohr－Coulomb の降伏条件に他ならない。この場合の降伏曲面は，原点を頂点とする六角錐となっている。

参考文献．

1) Prager, W. and Synge, J. L.: Approximations in Elasticity Based on the Concept of Function Space, Quart. Appl. Math. Vol.5 No. 3 (1947), 241-269

2) Oliveira, E. R. A.: Theoretical Foundations of the Finite Element Method, Int. J. Solids Structures Vol.4 No. 10 (1968), 929-952

3) Oliveira, E. R. A.: Completeness and Convergence in the Finite Element Method, Proc. 2nd Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics Part 2 (1968), 1061-1089

4) Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Pólya, G.: Inequalities, 2nd ed., Cambridge (1959), 30-39