I-93　　地盤の弾塑性解析

秋田大学　正員　色部　誠
秋田大学　正員　赤木知之
秋田大学　正員　○伊藤　洋

1. まえがき

軟弱地盤地区の開発．フィルタイプダム建設の普及などの現実に対し．構造物の安全性を数値的に確認するうえで．地盤あるいは土構造物の弾塑性解析法の確立が望まれる。土に対して広く用いられる降伏条件式は．Drucker - Prager の式

$$f = \alpha J_1 + \sqrt{J_2} = k \tag{1}$$

である。（1）式では．等方応力成分の影響項右辺第一項によって．土の変形の圧縮性が考慮されている。この式は等方性材料に関するものである。山田[1,2]は．これを異方性材料に拡張し．さらに．土質力学で一般に用いられる Coulomb の降伏条件式との関連を与え．土の弾塑性解析の基礎理論を展開している。ここでは．土の降伏が水に強く支配されることを考慮し．水を含んだ土の変形を有限要素法によって求めるのに必要とされる解式を示す。

2. 熱弾性と土の弾性圧密

ここでは．すべて等方性材料として考える。熱弾性を支配する基礎方程式と土の弾性圧密を支配支配する基礎方程式[3]とを比較して示せば．つぎのとおりであり．両者は．関係する物理量に次元の違いがあるだけで．形式的にはまったく一致する。

熱弾性

(i). ひずみ成分

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

(ii). 構成方程式

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{pp}\delta_{ij} + \alpha\theta\delta_{ij}$$

または．

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{pp}\delta_{ij} + 2Ge_{ij} - \mu\delta_{ij}\theta$$

ここで．αは線膨張係数．θは温度変化量．μは $E\alpha/1-2\nu$ である。

(iii). 適合条件

$$e_{ij,kl} + e_{kl,ij} - e_{ik,jl} - e_{jl,ik} = 0$$

(iv). 熱伝導

$$h_i = -k\frac{\partial\theta}{\partial x_i}$$

上式は Fourier の法則であって．h_iは熱流束成分．kは熱伝導率である。

土の弾性圧密

(i). ひずみ成分

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

(ii). 構成方程式

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{pp}\delta_{ij} + \frac{\sigma}{3H}\delta_{ij}$$

または．

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{pp}\delta_{ij} + 2Ge_{ij} - \varkappa\delta_{ij}\sigma$$

ここで．$1/H$ は水圧の変化による土の圧縮率．σは間隙水圧．$\varkappa$は土を圧縮した場合の含水量変化と土の容積変化の比である。

(iii). 適合条件．

左に同じ．

(iv). 透水

$$v_i = -k\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}$$

上式は Darcy の法則であって．v_iは水の速度成分（単位面積を通過するi成分流量）．kは透水

(IV). 比熱

(a). $-\frac{\partial h_i}{\partial x_i} = \rho C_v \frac{\partial \theta}{\partial t}$

(b). $-\frac{\partial h_i}{\partial x_i} \approx \rho C_v \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \beta \frac{\partial e_{ij}}{\partial t}$

ここで，ρ は密度，C_v は固体の定容比熱である。 (IV)-(a) は非連成熱弾性の場合であり，(b) は連成熱弾性の場合である。

係数である。

(V). 連 続

$$-\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{1}{Q}\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

ただし，$1/Q = 1/R - \alpha/H$ で与えられ，$1/R$ は水圧の変化による含水量の変化である。

土の弾性圧密に関係する諸定数の物理的解釈は文献 3) にくわしい。 以上によって連成熱弾性と土の弾性圧密との類同が明らかである。 Biot [4] は，非連成熱弾性方程式はつぎの変分方程式がなりたつための必要条件であるとしている。

$$\delta \mathscr{V} + \delta \mathscr{D} = \int_V (X_i - \rho \ddot{u}_i)\delta u_i \, dv + \int_B \left(\overset{\nu}{T_i}\,\delta u_i - \theta_0 \frac{\delta H_i}{T_0} \nu_i\right) ds \tag{2}$$

ただし，変位 u_i は境界の一部で $\delta u_i = 0$ である。 θ_0 は境界外側温度，T_0 は物体の基準温度である。 そして，H_i は，

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} \simeq h_i \quad , \quad -H_{i,i} = \rho C_v \theta + T_0 \beta \delta_{ij} e_{ij} \tag{3}$$

であって，$\theta = e_{ij} = 0$ のときには，$H_i = 0$ である。 また，

$$\mathscr{V} = \int_V \left(\frac{1}{2}\sigma_{ij} e_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\rho C_v \theta^2}{T_0}\right) dv \tag{4}$$

$$\delta \mathscr{D} = \frac{1}{T_0}\int_V \frac{\dot{H}_i}{k}\,\delta H_i \, dv \tag{5}$$

である。

(2)，ないし (5) 式を土の弾性圧密の問題に変換するために，H_i の代わりに V_i を用い，$\sigma = e_{ij} = 0$ とし

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} \simeq v_i \quad , \quad -V_{i,i} = \frac{1}{Q}\sigma + \alpha \delta_{ij} e_{ij} \tag{3'}$$

と定義する。 T_0 に代る基準圧力を σ_0 とおき，θ_0/T_0 に代る圧力比を $\bar{\sigma}_0/\sigma_0$ とおけば，

$$\mathscr{V} = \int_V \left(\frac{1}{2}\sigma_{ij} e_{ij} + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{Q\sigma_0}\right) dv \tag{4'}$$

$$\delta \mathscr{D} = \frac{1}{\sigma_0}\int_V \frac{\dot{V}_i}{k}\,\delta V_i \, dv \tag{5'}$$

のとき，弾性圧密方程式は，

$$\delta \mathscr{V} + \delta \mathscr{D} = \int_V (X_i - \rho \ddot{u}_i)\delta u_i \, dv + \int_B \left(\overset{\nu}{T_i}\,\delta u_i - \frac{\bar{\sigma}_0\,\delta V_i}{\sigma_0} \nu_i\right) ds \tag{2'}$$

なる変分方程式の成立の必要条件となるわけである。

$\mathscr{V}$ は弾性圧密ポテンシャル，$\mathscr{D}$ は散逸関数である。 V_i は強いて言えば，総流量の i 成分である。 (3)′ 式を付帯条件と考えることができるが，あとの計算ではこの式より σ を，V_i ならびに e_{ij} であらわし，(4)′ 式に代入し，(2)′ を u_i および V_i の変分で整理している。

3. 有限要素法による土の圧密変形解析の定式化

ここでは２次元問題について考える。三角形要素の節点における変位，力，総流量を普通の記法にしたがい $\{u\}^e$, $\{F\}^e$, $\{V\}^e$ であらわす。要素内の変位，総流量は $[A]\{u\}^e$, $[A]\{V\}^e$ とかかれる。要素のひずみを

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\}^e$$

とあらわせば，(3)′式より水圧の変化量 σ は

$$\sigma = -Q\,(1,\ 1)\,[B_1]\left(\{V\}^e + \kappa\{u\}^e\right) \tag{6}$$

となる。ただし，$[B_1]$ は $[B]$ より３行目を除いた２行６列のマトリックスである。よって

$$\sigma^2 = Q^2\left(\{V\}^e + \kappa\{u\}^e\right)^T [B_1]^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} [B_1]\left(\{V\}^e + \{u\}^e\right) \tag{7}$$

を得る。(2)′式の左辺の各項を要素について積分すれば，

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{V} = & \iint \left(\{\delta u\}^e\right)^T [B]^T [D] [B] \{u\}^e \,dx\,dy \\ & + \frac{Q}{\sigma_0} \iint \left(\{\delta V\}^e\right)^T [B_1]^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} [B_1] \left(\{V\}^e + \kappa\{u\}^e\right) dx\,dy \\ & + \frac{Q}{\sigma_0} \iint \left(\{\delta u\}^e\right)^T [B_1]^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} [B_1] \left(\{V\}^e + \kappa\{u\}^e\right) dx\,dy \end{aligned} \tag{8}$$

$$\delta\mathcal{D} = \frac{1}{\sigma_0 k} \iint \left(\{\delta V\}^e\right)^T [A]^T [A] \{\dot{V}\} \,dx\,dy \tag{9}$$

となり，また，物体力，慣性力の項を除けば，境界上の積分のみとなり，右辺の第２項を分解して，

$$\int_S \overset{\nu}{T}_i\, \delta u_i\, dS = \left(\{\delta u\}^e\right)^T \{F\}^e \tag{10}$$

$$\int_S \frac{\bar{\sigma}_0\, \delta V_i}{\sigma_0}\, \nu_i\, dS = \frac{\bar{\sigma}_0}{\sigma_0} \left(\{\delta V\}^e\right)^T \{d\} \tag{11}$$

ただし，$\{d\}$ は要素各辺の方向成分からなるベクトルである。

(8), (9), (10), (11)式を(2)′式に代入すれば，$\{\delta u\}^e$, $\{\delta V\}^e$ が任意であることから，$\{u\}^e$, $\{V\}^e$ に関する連立剛性方程式を得る。この際，(2)′式を時刻 $t_0 \sim t_1$ の間で時間積分を行なえば，$\{u\}^e$, $\{V\}^e$ ならびに節点力成分のみが時間の関数であるが，現象の速度がきわめて緩慢であるから，$t_0 \sim t_1$ 間で時間に対してこれらの線形性を仮定し，連立剛性方程式をつぎのようにかくことができる。

$$\left.\begin{aligned} \{F_1 + F_0\}^e &= [K]\{u_1 + u_0\}^e + [\beta]\{u_1 + u_0\}^e + [\beta]\{V_1 + V_0\}^e \\ -\{G_1 + G_0\}^e &= [\beta]\{u_1 + u_0\}^e + [\beta]\{V_1 + V_0\}^e + \frac{2}{t_1 - t_0}[\gamma]\{V_1 - V_0\}^e \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$[K]$, $[\beta]$ は (8)式より得られる剛性マトリックスであり，$[\gamma]$ は (9)式から得られる剛性マトリックスである。また，$-\{G_1 + G_0\}$ は (11)式から得られる擬外力である。

(12)式を重ね合せて．全体の剛性方程式を得る。　この式において．$\{u_0\}, \{v_0\}$ は初期値として与えられ．$\{u_1\}, \{v_1\}$ が求められる。　以上によって土の圧密変形を考慮した有限要素法解析が可能となる。　弾塑性解析を行なうには．文献 1), 2) の増分式を用い．(12) 式を増分形に改めればよい。

4．土の粘着力 c，内部摩擦角 φ

Coulomb の降伏条件式

$$\tau = c + p \tan\varphi$$

における．c, φ は間隙水圧 σ，間隙比，含水比に依存する。　その関係は．土ごとに実験的に確かめられる。　前節の解法により．時間を追って u, σ が求められるので．各要素の時刻ごとの間隙水圧．間隙比、含水比が得られる。　よって．圧密変形を考慮した土の弾塑性解析が可能となる。

文献

1). 山田嘉昭；“非線形問題解析法の現状と展望”　生産研究 [22]—1　(1970. 1)

2). 〃　；“材料非線形問題解析法”　生研講習会テキスト 第8回マトリックス法の応用 (1970.6)

3). Biot, M. A.; “General Theory of Three Dimensional Consolidation”, Appl. Phy. [12]−2 (1941)

4). Fung, Y. C; “固体の力学 (邦訳)”, 培風館 (1970)