I－92　　歪硬化現象を考慮した鋼材の弾塑性捩り挙動について

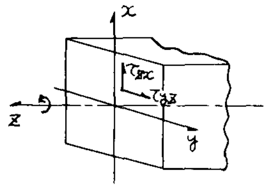
宮崎大学工学部　正会員　太田　俊昭
〃　学生員　○大津留　哲矢

1　まえがき　　本研究は、歪硬化の影響の著しいＳＳ４１などの軟鋼材（一様な正方形および矩形を有する断面）を対象にして、その弾塑性捩り挙動を歪増分理論に基づいて解明したもので、一応の成果をえたのでここにまとめて報告する。その際、解析に必要な硬化率H'については、実際にSMT型捩り試験機を用いて軟鋼（丸鋼）の捩り実験を行ない、合せん断応力－合せん断歪図を作製し、これより硬化率H'を求めた。また、与荷重捩りモーメントに対するせん断応力分布は弾性、塑性域を通じ一貫して媒介関数、即ち捩りの応力関数ϕを導入のうえ、差分法による数値解析によって決定した。

2　基礎理論および弾塑性捩り解析　　一様な任意断面棒が純捩りTを受けた場合、一般に応力と歪増分の関係は、ロイスの方程式で次のように与えられる。（図－1参照）

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{\gamma}^p_{zx}/2}{\tau_{zx}} = \frac{\dot{\gamma}^p_{yz}/2}{\tau_{yz}} = \frac{\dot{\gamma}^p/2}{\tau} \quad \text{-----------} \quad (1)$$

ここに、$\dot{\gamma}^p_{zx}$, $\dot{\gamma}^p_{yz}$；塑性せん断歪成分の増分（工学定義）、
τ_{zx}, τ_{yz}；せん断応力成分、$\dot{\lambda}$；正の比例定数。



図－1

歪硬化を考慮した場合、硬化率H'は次の式で示される。

$$H' = \frac{\dot{\bar{\tau}}}{\dot{\bar{\gamma}}^p} = \frac{\sqrt{3}\,\dot{\tau}}{\dot{\gamma}^p/\sqrt{3}} = \frac{3\dot{\tau}}{\dot{\gamma}^p} \quad \text{---------------} \quad (2)$$

ここに、$\dot{\bar{\tau}}$；相当せん断応力増分、$\dot{\bar{\gamma}}^p$；相当塑性歪増分、$\dot{\bar{\tau}} = \sqrt{3}\,\dot{\tau}$、$\dot{\bar{\gamma}}^p = \dot{\gamma}^p/\sqrt{3}$。

そこで、(1)式は(2)式をつかって書き表わすと、

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2}\frac{\dot{\gamma}^p}{\dot{\tau}}\frac{\dot{\tau}}{\tau} = \frac{3}{2}\frac{1}{H'}\frac{\dot{\tau}}{\tau} \quad \text{-------------} \quad (3)$$

次に、せん断応力に対応するせん断歪増分$\dot{\gamma}$を、ゆがみ関数$\dot{\psi}$を用いて表わせば、

$$\left.\begin{aligned} \dot{\gamma}_{yz} &= \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial y} + \dot{\omega} x \\ \dot{\gamma}_{zx} &= \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial x} - \dot{\omega} y \end{aligned}\right\} \quad \text{-----------------} \quad (4)$$

ここに、$\dot{\omega}$；捩り率増分。

また、(1)式より、$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^e + \dot{\gamma}^p$　をつかって、

$$\left.\begin{aligned} \dot{\gamma}_{yz} - \frac{\dot{\tau}_{yz}}{G} &= 2\dot{\lambda}\,\tau_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} - \frac{\dot{\tau}_{zx}}{G} &= 2\dot{\lambda}\,\tau_{zx} \end{aligned}\right\} \quad \text{--------------} \quad (5)$$

ここに、$\dot{\gamma}$；全歪増分、$\dot{\gamma}^e$；弾性歪増分、G；せん断弾性係数。

(4)式、(5)式より$\dot{\gamma}_{zx}$、$\dot{\gamma}_{yz}$を消去すると次式がえられる。

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial y} + \dot{\omega} x &= 2\dot{\lambda}\,\tau_{yz} + \frac{\dot{\tau}_{yz}}{G} \\ \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial x} - \dot{\omega} y &= 2\dot{\lambda}\,\tau_{zx} + \frac{\dot{\tau}_{zx}}{G} \end{aligned}\right\} \quad \text{-----------} \quad (6)$$

(6)式の両辺を各々x、yで偏微分して$\dot{\psi}$を消去し、応力関数ϕを導入すれば、

$$\frac{\partial^2 \dot{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{\phi}}{\partial y^2} + 2G\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\dot{\lambda}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\dot{\lambda}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\right\} = -2\dot{\omega}G \quad \text{--------} \quad (7)$$

ここに、$\tau_{yz} = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x}$、$\tau_{zx} = \dfrac{\partial \phi}{\partial y}$。

なお、弾性域および除荷時においては$\dot{\lambda} = 0$であるので、(7)式より周知のϕに関する基礎方程式がえられる。

$$\frac{\partial^2 \dot{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{\phi}}{\partial y^2} = -2\dot{\omega} G \quad \text{-------------} \quad (8)$$

ここで、対象とする棒の断面を等間隔で分割し、格子点番号を図－２のように定める。(7)式と(8)式を差分表示すれば、次のような弾性および塑性両域に適用できる式がえられる。

$$\begin{aligned}
&\{4 + G\alpha_{i,j}(4\dot{\lambda}_{i,j} + \dot{\lambda}_{i,j+1} + \dot{\lambda}_{i,j-1} + \dot{\lambda}_{i-1,j} + \dot{\lambda}_{i+1,j})\}\dot{\phi}_{i,j} - \{1 + G\alpha_{i,j}(\dot{\lambda}_{i,j} + \dot{\lambda}_{i,j-1})\}\dot{\phi}_{i,j-1} \\
&- \{1 + G\alpha_{i,j}(\dot{\lambda}_{i,j} + \dot{\lambda}_{i,j+1})\}\dot{\phi}_{i,j+1} - \{1 + G\alpha_{i,j}(\dot{\lambda}_{i,j} + \dot{\lambda}_{i-1,j})\}\dot{\phi}_{i-1,j} - \{1 + G\alpha_{i,j}(\dot{\lambda}_{i,j} + \dot{\lambda}_{i+1,j})\}\dot{\phi}_{i+1,j} \\
&= 2a^2\dot{\omega}G - G\alpha_{i,j}\{\phi'_{i,j}(4\dot{\lambda}_{i,j} + \dot{\lambda}_{i,j-1} + \dot{\lambda}_{i,j+1} + \dot{\lambda}_{i-1,j} + \dot{\lambda}_{i+1,j}) - \phi'_{i,j-1}(\dot{\lambda}_{i,j} + \dot{\lambda}_{i,j-1}) \\
&- \phi'_{i,j+1}(\dot{\lambda}_{i,j} + \dot{\lambda}_{i,j+1}) - \phi'_{i-1,j}(\dot{\lambda}_{i,j} + \dot{\lambda}_{i-1,j}) - \phi_{i+1,j}(\dot{\lambda}_{i,j} + \dot{\lambda}_{i+1,j})\} \quad \text{-------} \quad (9)
\end{aligned}$$

ここに、$\phi - \phi' = \dot{\phi}$、$\phi'$；前の荷重段階の応力関数、

$\alpha_{i,j}$；弾性域で０、塑性域で１となるパラメーター。

(9)式を行列表示すれば、

$$[A][\dot{\phi}] = 2a^2\dot{\omega}G[B] + [C]$$

ゆえに、$[\dot{\phi}] = 2a^2\dot{\omega}G[A]^{-1}[B] + [A]^{-1}[C]$ --------- (10)

捩りモーメント増分$\dot{T}$は膜理論より、

$$\dot{T} = 2\iint \dot{\phi}\, dx\, dy = 2a^2 \sum_i \sum_j (\dot{\phi}_{i,j} + \dot{\phi}_{i+1,j} + \dot{\phi}_{i,j+1} + \dot{\phi}_{i+1,j+1}) \quad \text{---} \quad (11)$$

(11)式を行列表示すれば、

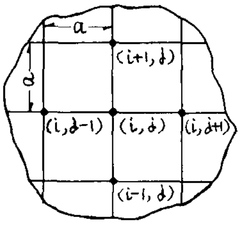
$$\dot{T} = [D][\dot{\phi}] \quad \text{----------------------} \quad (12)$$

(10)式と(12)式より$[\dot{\phi}]$を消去すれば、

$$\dot{\omega} = \frac{\dot{T} - [D][A]^{-1}[C]}{2a^2 G[D][A]^{-1}[B]} \quad \text{---------------} \quad (13)$$

ここに、$[A]$；正方行列、$[B]$；$B_{i1} = 1$である列行列、$[C]$および$[\dot{\phi}]$；ともに列行列。

$[D]$；断面の分割数による定数の行行列。



図－２

以上より、$\dot{T}$を与え、その荷重段階における$\dot{\phi}$、τ、$\dot{\lambda}$、$\dot{\omega}$などを逐次求めていけば、必要なT－ω曲線がえられる。

ここで、数値解析に必要な$\dot{\lambda}$、H'、γ^pの算定式の内容を示せば以下のとおりである。

まず、ミーゼスの降伏条件は、　$\bar{\tau}^2 = 3(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$　　ここに、$\bar{\tau}$；相当せん断応力。

両辺を時間tで微分して変形すれば、　$\dot{\bar{\tau}} = \dfrac{3(\tau_{yz}\dot{\tau}_{yz} + \tau_{zx}\dot{\tau}_{zx})}{\bar{\tau}}$

これを、$\dot{\bar{\tau}} = \sqrt{3}\,\dot{\tau}$、$\bar{\tau} = \sqrt{3}\,\tau$　の関係を用いて書きなおせば、

$$\dot{\tau} = \frac{\tau_{yz}\dot{\tau}_{yz} + \tau_{zx}\dot{\tau}_{zx}}{\tau} \quad \text{-----------------} \quad (14)$$

(14)式を(3)式に代入して$\dot{\lambda}$を求めれば、

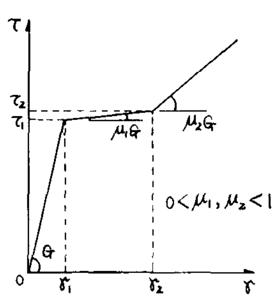
$$\dot{\lambda} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{H'}\,\frac{\tau_{yz}\dot{\tau}_{yz} + \tau_{zx}\dot{\tau}_{zx}}{\tau^2} \quad \text{---------------} \quad (15)$$

(15)式に(2)式を代入のうえ変形すれば、結局$\dot{\lambda}$として次式をえる。

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2}\,\frac{(\gamma^p - \gamma^{p\prime})}{(\tau - \tau')}\,\frac{\tau_{yz}(\tau_{yz} - \tau'_{yz}) + \tau_{zx}(\tau_{zx} - \tau'_{zx})}{\tau^2} \quad \text{----} \quad (16)$$

ここに、$\dot{\gamma}^p = \gamma^p - \gamma^{p\prime}$、$\dot{\tau} = \tau - \tau'$、

$\gamma^{p\prime}$；前の荷重段階の塑性歪、　τ'；前の荷重段階のせん断応力。



図－３

次に、丸鋼の実験結果よりえられたτ－γ図をもとに、理想化したものが図－３である。この図より、次の関係式がえられる。

$$\gamma = \frac{\tau}{\mu_n G} + \left(\gamma_n - \frac{\tau_n}{\mu_n G}\right), \qquad \gamma^e = \frac{\tau}{G}$$

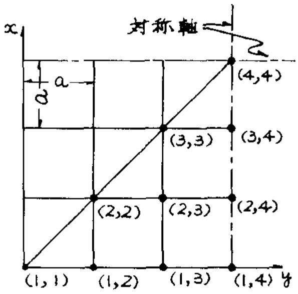
ここに、$\tau_1 \leqq \tau < \tau_2$ のとき $n=1$、$\tau_2 \leqq \tau$ のとき $n=2$ となる。

ゆえに、$\gamma^p = \gamma - \gamma^e$ より γ^p の算定式は次のとおりである。

$$\gamma^p = \left(\frac{1}{\mu_n G} - \frac{1}{G}\right)\tau + \left(\gamma_n - \frac{\tau_n}{\mu_n G}\right) \qquad \text{------} \quad (17)$$

(17)式を(2)式に代入すれば、H' の算定式が与えられる。

$$H' = \frac{3\mu_n G}{1-\mu_n} \qquad \text{----------------} \quad (18)$$



図－4

3　応用例　正方形断面棒について解析すれば、次のようになる。まず、対称性を考慮して図－4のように各格子点に番号をつける。ここでは一応、断面を縦、横ともに格子点間隔 a で6等分した。

(13)式において、[A]、[B]、[C]、[D]の各行列の要素は次のとおりである。

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & a_{35} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \qquad [B] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad [C] = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix}$$

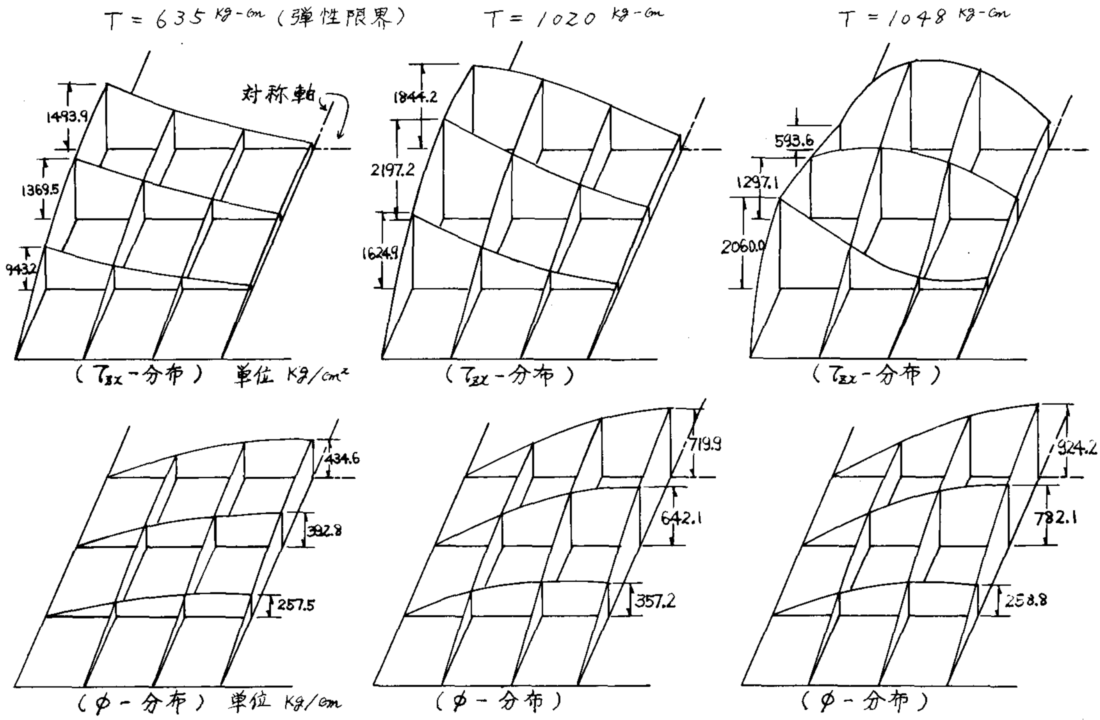
$$[D] = 2a^2 \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ただし、

$$a_{11} = 4 + G\alpha(2,2)\{4\dot\lambda(2,2) + 2\dot\lambda(1,2) + 2\dot\lambda(2,3)\}$$
$$a_{12} = -2\{1 + G\alpha(2,2)\{\dot\lambda(2,2) + \dot\lambda(1,2)\}\}$$
$$a_{21} = -\{1 + G\alpha(2,3)\{\dot\lambda(2,3) + \dot\lambda(2,2)\}\}$$
$$a_{22} = 4 + G\alpha(2,3)\{4\dot\lambda(2,3) + \dot\lambda(2,2) + \dot\lambda(2,4) + \dot\lambda(1,3) + \dot\lambda(3,3)\}$$
$$a_{23} = -\{1 + G\alpha(2,3)\{\dot\lambda(2,3) + \dot\lambda(2,4)\}\}$$
$$a_{24} = -\{1 + G\alpha(2,3)\{\dot\lambda(2,3) + \dot\lambda(3,3)\}\}$$
$$a_{32} = -2\{1 + G\alpha(2,4)\{\dot\lambda(2,4) + \dot\lambda(2,3)\}\}$$
$$a_{33} = 4 + G\alpha(2,4)\{4\dot\lambda(2,4) + 2\dot\lambda(2,3) + \dot\lambda(1,4) + \dot\lambda(3,4)\}$$
$$a_{35} = -\{1 + G\alpha(2,4)\{\dot\lambda(2,4) + \dot\lambda(3,4)\}\}$$
$$a_{42} = -2\{1 + G\alpha(3,3)\{\dot\lambda(3,3) + \dot\lambda(2,3)\}\}$$
$$a_{44} = 4 + G\alpha(3,3)\{4\dot\lambda(3,3) + 2\dot\lambda(2,3) + 2\dot\lambda(3,4)\}$$
$$a_{45} = -2\{1 + G\alpha(3,3)\{\dot\lambda(3,3) + \dot\lambda(3,4)\}\}$$
$$a_{53} = -\{1 + G\alpha(3,4)\{\dot\lambda(3,4) + \dot\lambda(2,4)\}\}$$
$$a_{54} = -2\{1 + G\alpha(3,4)\{\dot\lambda(3,4) + \dot\lambda(3,3)\}\}$$
$$a_{55} = 4 + G\alpha(3,4)\{4\dot\lambda(3,4) + 2\dot\lambda(3,3) + \dot\lambda(2,4) + \dot\lambda(4,4)\}$$
$$a_{56} = -\{1 + G\alpha(3,4)\{\dot\lambda(3,4) + \dot\lambda(4,4)\}\}$$
$$a_{65} = -4\{1 + G\alpha(4,4)\{\dot\lambda(4,4) + \dot\lambda(3,4)\}\}$$
$$a_{66} = 4\{1 + G\alpha(4,4)\{\dot\lambda(4,4) + \dot\lambda(3,4)\}\}$$

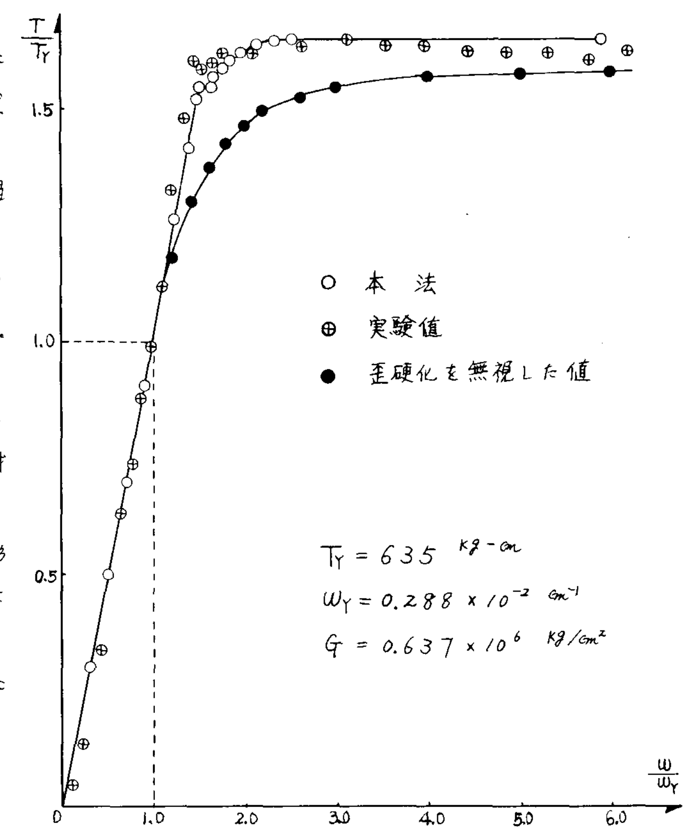
$$C_1 = -G\alpha(2,2)\{\phi(2,2)\{4\dot\lambda(2,2) + 2\dot\lambda(1,2) + 2\dot\lambda(2,3)\} - 2\phi(2,3)\{\dot\lambda(2,3) + \dot\lambda(2,2)\}\}$$
$$C_2 = -G\alpha(2,3)\{\phi(2,3)\{4\dot\lambda(2,3) + \dot\lambda(2,2) + \dot\lambda(2,4) + \dot\lambda(1,3) + \dot\lambda(3,3)\} - \phi(2,2)\{\dot\lambda(2,3) + \dot\lambda(2,2)\}\}$$
$$C_3 = -G\alpha(2,4)\{\phi(2,4)\{4\dot\lambda(2,4) + 2\dot\lambda(2,3) + \dot\lambda(1,4) + \dot\lambda(3,4)\} - 2\phi(2,3)\{\dot\lambda(2,4) + \dot\lambda(2,3)\} - \phi(3,4)\{\dot\lambda(3,4) + \dot\lambda(2,4)\}\}$$
$$C_4 = -G\alpha(3,3)\{\phi(3,3)\{4\dot\lambda(3,3) + 2\dot\lambda(2,3) + 2\dot\lambda(3,4)\} - 2\phi(2,3)\{\dot\lambda(2,3) + \dot\lambda(3,3)\} - 2\phi(3,4)\{\dot\lambda(3,3) + \dot\lambda(3,4)\}\}$$
$$C_5 = -G\alpha(3,4)\{\phi(3,4)\{4\dot\lambda(3,4) + 2\dot\lambda(3,3) + \dot\lambda(2,4) + \dot\lambda(4,4)\} - \phi(2,4)\{\dot\lambda(3,4) + \dot\lambda(2,4)\} - 2\phi(3,3)\{\dot\lambda(3,4) + \dot\lambda(3,3)\} - \phi(4,4)\{\dot\lambda(3,4) + \dot\lambda(4,4)\}\}$$
$$C_6 = -G\alpha(4,4)\{\phi(4,4)\{4\dot\lambda(4,4) + 4\dot\lambda(3,4)\} - 4\phi(3,4)\{\dot\lambda(4,4) + \dot\lambda(3,4)\}\}$$

これらを用いた数値計算の結果より、T に対応する τ_{zx}－分布と ϕ－分布を次の図に示した。



4　考察

数値解析により次のことが判明した。1)捩りモーメントの増加に伴なって断面の辺の中央部がまず降伏し、さらに両縁へ塑性域が拡がる。2)断面の内部へ塑性域が拡がってゆく過程において、以前に一度降伏に達して塑性変形が進行している箇所でも、部分的に応力の除荷状態がおこりうること。3)本法の数値解析よりえられたT−ω曲線は、歪硬化を無視した解析結果に比べて、より実際の鋼材の捩り挙動に近い曲線となりうる。（比較のため、著者らの行なった正方形断面棒の実験値と本法の解析結果、および歪硬化を無視した解析結果を右図に併記した。）なお、矩形断面棒については講演時に発表の予定である。



5　参考文献

1) 山田嘉昭「塑性力学」日刊工業新聞社、　2) 太田俊昭「棒の弾塑性捩りに関する基礎的研究」宮崎大学工学部研究報告第17号