I-90　残留応力およびひずみ硬化の影響を考慮したI形断面ばりの弾塑性安定解析

九州大学　正員　樗木 武
新日本製鐵　〃　林田 紀雄
九州大学　学生員　○　海江田光正

1.緒言

先に著者らはひずみ硬化および残留応力の影響を無視した骨組構造の弾塑性安定問題の解法として bar－hinge system method を提案したが，これによれば比較的簡単に本題を解析しうることおよび十分高い精度の解が得られることが明らかとなった。つづいて，本研究は，同じ bar－hinge system method を用いてひずみ硬化および残留応力の影響をも考慮した骨組構造の弾塑性安定問題の解法を提案するものである。

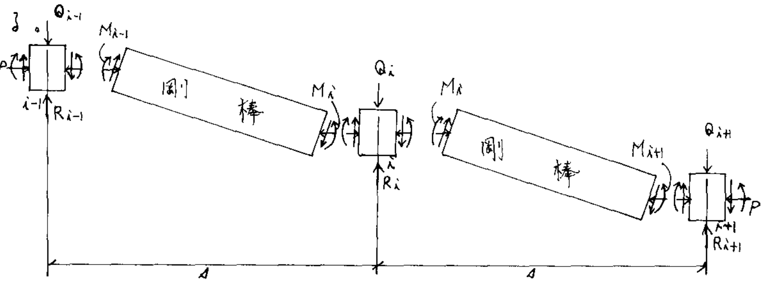
2.基礎式の誘導

bar－hinge system とは，図－1に示すごとく，軸力と横荷重の作用をうける部材を適当な間隔(λ)に分割して，分割点を弾塑性ヒンジに，また分割点間を剛棒に置き換えてモデル化したものである[2]。なお，このとき，次項を仮定する。

(1)剛棒は重さがなく，変形しない。

(2)荷重はヒンジ部のみ作用する。

(3)弾塑性ヒンジの部材方向の寸法は零である。



（図－1）

(4)応力とひずみはヒンジ部のみ生じ，それらの値はヒンジをはさむ両区間の平均値と解釈する。

剛棒に関するモーメントの釣合い式と，弾塑性ヒンジにおける鉛直方向の力の釣合い式から，次式が得られる。

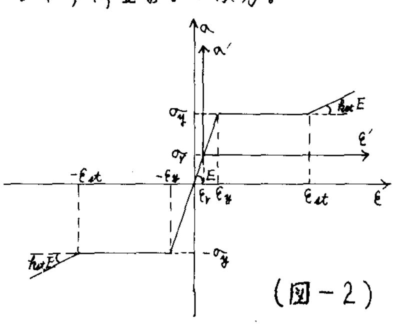
$$M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1} - P(w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}) = -\lambda(Q_i - R_i) \quad \text{----(1)}$$

また，曲率ϕ_iは

$$\phi_i = -(w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1})/\lambda^2 \quad \text{-----(2)}$$

ここに，w_i, M_i, Q_i, R_i；ヒンジiにおけるたわみ，曲げモーメント，荷重および反力。

次に，図－2に示すように，応力－ひずみ関係として理想化された硬化弾塑性体モデルを用いるものとする[1]。図中の記号σ'，ε'は軸力Pと曲げモーメントM_iにより生ずる付加応力および付加ひずみであり，σ_r，ε_rは各断面に存在する残留応力および残留ひずみである。また，$\sigma(=\sigma'+\sigma_r)$，$\varepsilon(=\varepsilon'+\varepsilon_r)$は各断面に生ずる総応力および総ひずみである。

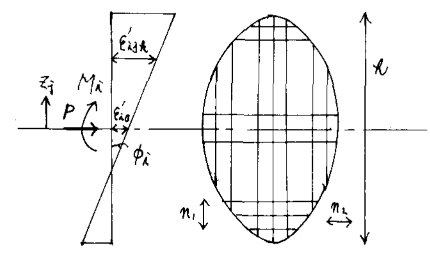


（図－2）

このとき，$\sigma'-\varepsilon'$関係を　$\sigma' = D_1\varepsilon' + D_2$ ----(3)　のように表現す

るものとすれば，勾配ν_1および定数項ν_2は各応力状態により次のごとく定義される。すなわち，弾性域では$\nu_1=E$，$\nu_2=0$，塑性域では$\nu_1=0$，$\nu_2=\pm\sigma_y-\sigma_r$，ひずみ硬化域では$\nu_1=k_{st}E$，
$\nu_2=\pm\sigma_y-\sigma_r-k_{st}E(\pm\varepsilon_{st}-\varepsilon_r)$
（ここに，応力およびひずみは引張側を正とし，圧縮側を負とする。また，複号表示は応力およびひずみと符号同順の関係で用いられるものとする。）

さて，モーメントおよび軸力と曲率の関係は部材断面内の釣合い条件より求められるが，硬化弾塑性体モデルでは応力分布状態が複雑になるので，図－3のように断面を分割して考えることにする。すなわち，断面の縦方向分割数をn_1，横方向分割数をn_2とし，断面内の各要素は縦方向分割番号を添字jで，横方向のそれを添字kであらわすものとする。このとき，ヒンジiの任意の分割要素jkにおける付加ひずみε'_{ijk}は次式与えられる。



（図－3）

$\varepsilon'_{ijk}=\varepsilon'_{i0}-\phi_i z_j$ ----（4）　（ここに，z_j；断面中央軸から分割要素までの距離，ε'_{i0}；ヒンジiのM_iおよびPによる中央軸上の付加ひずみ。）

他方，残留応力は無載荷状態で存在している応力であるから，断面に関する釣合い条件より次式が導びかれる。

$P=-\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{k=1}^{n_2}A_{jk}\sigma'_{ijk}$ -----（5）　$M_i=-\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{k=1}^{n_2}A_{jk}\sigma'_{ijk}z_j$ ----（6）　（A_{jk}；分割要素jkの面積）

上記式(5)に式(3)および式(4)を代入すれば，ひずみε_{i0}と曲率ϕ_iの関係が次のように算定される。

$$\delta'_{i0}=\Big[-p+\mu\varphi_i\Big\{\sum\sum^{|\delta_{ijk}|\le 1}a_{jk}\bar z_j+k_{st}\sum\sum^{|\delta_{ijk}|>\delta_{st}}a_{jk}\bar z_j\Big\}+\Big\{-\sum\sum^{|\delta_{ijk}|>1}a_{jk}\,\mathrm{sign}(\delta_{ijk})+k_{st}\delta_{st}\sum\sum^{|\delta_{ijk}|>\delta_{st}}a_{jk}\,\mathrm{sign}(\delta_{ijk})\Big\}$$

$$+\Big\{\sum\sum^{|\delta_{ijk}|>1}a_{jk}\delta_{rijk}-k_{st}\sum\sum^{|\delta_{ijk}|>\delta_{st}}a_{jk}\delta_{rijk}\Big\}\Big]\Big/\Big\{\sum\sum^{|\delta_{ijk}|\le 1}a_{jk}+k_{st}\sum\sum^{|\delta_{ijk}|>\delta_{st}}a_{jk}\Big\}\ \text{----}(7)$$

ここに，無次元化にあたっては次のように行なった。$p=P/A\sigma_y$，$a_{jk}=A_{jk}/A$，$\delta_{ijk}=\varepsilon_{ijk}/\varepsilon_y$，
$\delta'_{i0}=\varepsilon'_{i0}/\varepsilon_y$，$\delta_{rijk}=\varepsilon_{rijk}/\varepsilon_y$，$\bar z_j=z_j/h$，$\mu=\phi_y h/\varepsilon_y$，$\varphi_i=\phi_i/\phi_y$，
$\phi_y=M_y/EI$，$M_y=W\sigma_y$　（W；断面係数，A；断面積）

次に，式(6)に式(3)，式(4)および式(7)を代入すれば，モーメントM_iとたわみwの関係が次のように得られる。

$m_i=\gamma_i-\beta_i(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})$ ----（8）

上記中，γ_iおよびβ_iはヒンジiの各要素の応力状態によって次のように与えられるものである。

$$\gamma_i=\gamma\Big[f_i p-\sum\sum^{|\delta_{ijk}|>1}a_{jk}(\bar z_j-f_i)\{\mathrm{sign}(\delta_{ijk})-\delta_{rijk}\}+k_{st}\delta_{st}\sum\sum^{|\delta_{ijk}|>\delta_{st}}a_{jk}(\bar z_j-f_i)\,\mathrm{sign}(\delta_{ijk})$$

$$-k_{st}\sum\sum^{|\delta_{ijk}|>\delta_{st}}a_{jk}(\bar z_j-f_i)\delta_{rijk}\Big]$$

$$\beta_i=\frac{\gamma\mu h^2}{\lambda^2}\Big\{\sum\sum^{|\delta_{ijk}|\le 1}a_{jk}\bar z_j(\bar z_j-f_i)+k_{st}\sum\sum^{|\delta_{ijk}|>\delta_{st}}a_{jk}\bar z_j(\bar z_j-f_i)\Big\}$$

また，

$$f_i = \left(\sum^{|\delta_{ijk}| \leq 1} \sum a_{jk} \bar{z}_j + k_{st} \sum^{|\delta_{ijk}| > \delta_{st}} \sum a_{jk} \bar{z}_j \right) \Big/ \left(\sum^{|\delta_{ijk}| \leq 1} \sum a_{jk} + k_{st} \sum^{|\delta_{ijk}| > \delta_{st}} \sum a_{jk} \right)$$

ここに，無次元化にあたっては次のように行なった。$m_i = M_i / M_y$，$\gamma = hA/W$，$y_i = w_i / h$，$\alpha = \sqrt{\lambda^2 \sigma_y / \pi E}$　（n；部材の軸方向分割数，λ；細長比）

式(7)および式(8)の$|\delta_{ijk}| \leq 1$等は$j = 1$からn_1までおよび$k = 1$からn_2までのうちで，$\Sigma\Sigma$の上印に記する不等式によって定められる範囲の分割要素に関して加え合せることを意味するものとする。また，$\mathrm{sign}(\delta_{ijk})$はひずみ$\delta_{ijk}$の正負の符号を表わす。

式(1)を無次元化して得られる式に式(8)を代入すれば次式が得られ，これが本題の弾塑性安定問題に関する基礎式となるものである。

$$A_{i-2} y_{i-2} + A_{i-1} y_{i-1} + A_i y_i + A_{i+1} y_{i+1} + A_{i+2} y_{i+2} - \frac{\lambda \sqrt{AI}}{n W} r_i = B_i \quad ---- (9)$$

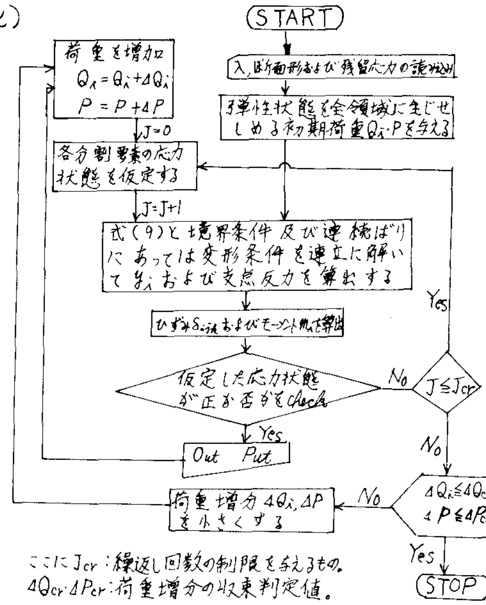
ただし，

$$A_{i-2} = -\beta_{i-1}, \quad A_{i-1} = 2(\beta_{i-1} + \beta_i) - \gamma p$$

$$A_i = -(\beta_{i+1} + 4\beta_i + \beta_{i-1}) + 2\gamma p$$

$$A_{i+1} = 2(\beta_i + \beta_{i+1}) - \gamma p, \quad A_{i+2} = -\beta_{i+1}$$

$$r_i = R_i / P_y, \quad B_i = -\frac{\lambda \sqrt{AI}}{n W} \frac{Q_i}{P_y} - (\gamma_{i+1} - 2\gamma_i + \gamma_{i-1}) \qquad (P_y; A\sigma_y)$$



ここにJ_{cr}：繰返し回数の制限を与えるもの。
$\Delta Q_{cr} \cdot \Delta P_{cr}$：荷重増分の収束判定値。

（図－4）

なお，本法の計算手順を示せば，図－4のとおりである。

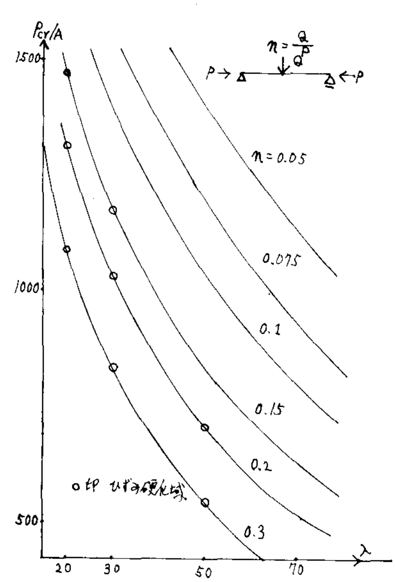
3.計算例

算例として，両端が単純支持される工形断面ばりを取りあげ，図－6に示すように断面の分割を行って，残留応力が各分割区間毎に一定であるものとして計算を行うものとする。計算に用いた諸元は$k_{st} = 1/40$，$\delta_{st} = 8$，$\sigma_y = 2400 \mathrm{Kg/cm^2}$，$E = 2.1 \times 10^6 \mathrm{Kg/cm^2}$，$t_1/h = 0.05$，$t_2/B = 0.06$である。

また，荷重状態は，スパン中央に集中荷重が作用する場合および等分布荷重満載の場合の両者について，横荷重・軸力比を一定に保つごとき状態を考えた。表－1は中央集中荷重状態で残留応力を無視し，ひずみ硬化域を考慮

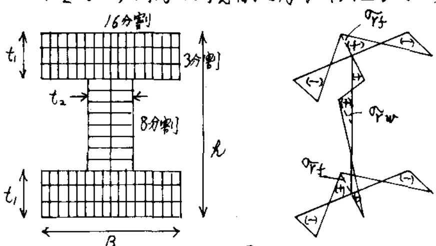
n \ λ		20	30	50
0.3	p	0.44312(0.42379)	0.33785(0.32418)	0.21756(0.21261)
	y	0.03263(0.01772)	0.08503(0.04715)	0.23550(0.12567)
0.2	p	0.54029(0.52285)	0.42665(0.41513)	0.28867(0.28547)
	y	0.02817(0.01470)	0.07494(0.04077)	0.20376(0.11459)
0.15	p	0.60750(0.59251)	0.49246(0.48346)	—　(0.34249)
	y	0.02507(0.01256)	0.05462(0.03609)	—　(0.10179)

（　）内 ひずみ硬化域無視　　（表－1）

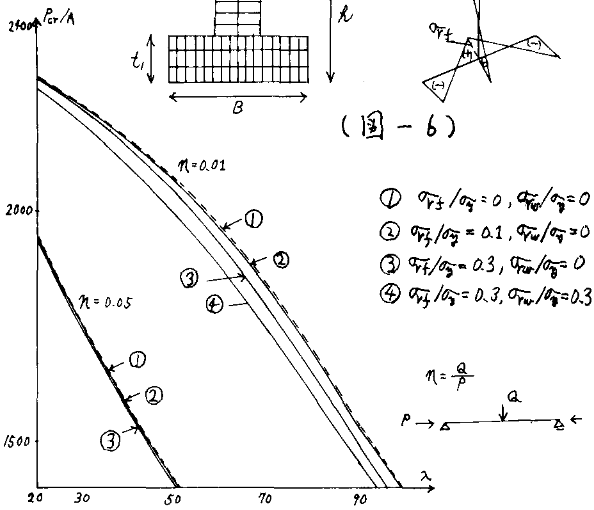


（図－5）

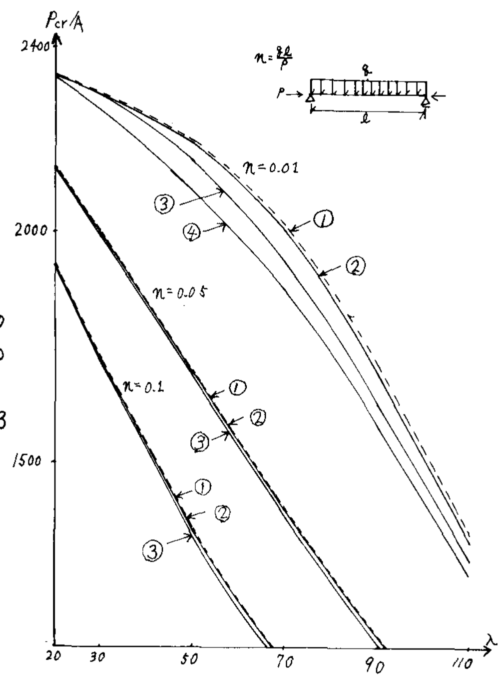
する場合とそれを無視する場合について，極限状態における軸力と部材中央点のたわみとの関係を求めたものである。また，図－5は残留応力が零の場合について，ひずみ硬化の影響範囲を明らかにしたものである。これらより，ひずみ硬化域を無視した場合はひずみ硬化域を考慮する場合よりも極限状態における軸力が若干小さくなり，また，ひずみおよびたわみはかなり限少していることがわかる。また，本例では，ひずみ硬化域は等分布荷重満載状態では生ぜず，中央集中荷重状態においては横荷重軸力比0.3では細長比50以下に対して生じ，横荷重軸力比0.075では細長比が20でも生じなかった。すなわち横荷重軸力比が大きく細長比が小さいほどひずみ硬化域は生じやすいといえる。図－7および図－8は残留応力を種々変化させた場合について，それぞれ極限状態における軸力と細長比の関係を求めプロットしたものである。中央集中荷重の場合も等分布荷重満載の場合もいずれも残留応力による限界荷重の低下はみられ，また，低下の割合は横荷重軸力比が小さいほど大きいといえる。また，フランジおよびウェブの両方に残留応力が存在する場合には限界荷重がさらに低下している。



（図－6）



（図－7）



（図－8）

4.結語

本研究は bar－hinge system により部材をモデル化することにより，はりの弾塑性安定問題の基礎式を誘導し，これを用いるごとき解法を提案した。また，算例として工形断面部材を対象としたが，本法によれば，く形，T形，円形等の対称断面はもちろんのこと非対称断面部材についても解析可能である。

なお，本研究には卒論生国分信徳君の協力を得た。記して感謝の意を表する。

（参考文献）

1) 単間孝志："偏心圧縮柱の荷重　変形性状に与えるひずみ硬化の影響"，土木学会論文報告集，184号，1970
2) 樗木武・林田紀雄："連続ばりの弾塑性安定問題の解法"，土木学会論文報告集，111号，1971