梁の動的粘弾塑性解析

宮崎大学工学部　正員　太田俊昭
〃　　〃　○中沢隆雄

1. まえがき

通常，構造物の破壊は，地震あるいは台風などの動的荷重による場合が最も多く，特にこの種被害が極めて甚大である我が国では，その耐震耐風構造設計に重要な，動的弾塑性解析理論の一般的確立と，その体系化が強く望まれている。一般に，構造材料が弾性限度以上の過大な動的負荷を受ける場合，応力－ひずみの履歴曲線は，弾・塑性の非線型応答を示すが，さらに厳密に言えば，材料のもつ粘性に起因する緩和もしくは遅延などの現象にも影響される。したがって，上述の問題を取り扱う場合，構造材料の動的力学特性を，定性的かつ定量的に把握することが，当然その前提課題となる。

さて，動的力学特性を解析するためには，応力とひずみとの時間的変化を関係づける微分方程式を求めなければならないが，その一法として，力学特性を理想化した力学的モデルを用いることは，度々有益かつ実用的である。

本論文は，構造材料，なかんずく鋼材の動的力学特性に比較的よく合致すると思われる渡辺氏[1]の提案した，スライダーを有する三要素モデルを基にして，構造解析に広く適用しうる応力－ひずみ方程式を導き，簡単な梁構造を対象に，質量の分布の影響を考慮した動的粘弾塑性理論を提案したもので，動的構造設計のための基礎資料を供することを目的とし，ここにその一端を報告するものである。

2. 基礎理論

2-1. 応力－ひずみ方程式

文献1)に従って，図-1(a)に示す力学的モデルを想定し，その応力－ひずみ関係を図-1(b)のように仮定する。このとき，応力－ひずみ状態を次の4 Stepに大別して考える。すなわち，

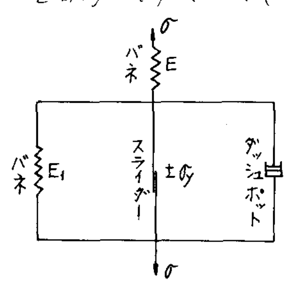


図-1 (a)

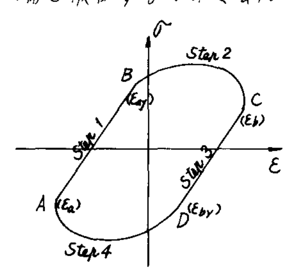


図-1 (b)

i) Step 1：弾性負荷（A～B），　ii) Step 2：粘弾塑性負荷（B～C），
iii) Step 3：弾性除荷（C～D），　iv) Step 4：粘弾塑性除荷（D～A）。

さて，以上の各Stepにおける応力－ひずみ方程式を以下に示す。

i) Step 1：　時刻 i における応力とひずみをそれぞれ σ_i, ε_i，図-1(a)のバネE（ヤング率E）部のひずみを $\varepsilon_{1,i}$ およびスライダー部のひずみを $\varepsilon_{2,i}$ とする。弾性時におけるスライダー部を伴う部分は，最大ひずみ $-\varepsilon_{2m}$ で固定されるものとすれば，全ひずみ ε_i は次のとうりである。

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{2,i} = \varepsilon_{1,i} - \varepsilon_{2m} = \sigma_i/E - \varepsilon_{2m} \quad \cdots\cdots (1)$$

式(1)を降伏ひずみ ε_y，降伏応力 σ_y で無次元化すれば次式をうる。以下バー記号は無次元化量を表わす。

$$\bar{\varepsilon}_i = \bar{\sigma}_i - \bar{\varepsilon}_{2m} \quad \cdots\cdots (2)$$

ii) Step 2：　応力 σ_i が $\sigma_y - E_1\varepsilon_{2m}$ に達すれば，スライダーがはずれ，バネ E_1（ヤング率 E_1）部とダッシュポット（粘性係数 η）が作動する。この場合，ひずみ $\varepsilon_{2,i}$ およびひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{2,i}$ が生じ，次のレ

オロジー方程式が成立する。

$$E\varepsilon_{1,i} = \sigma_i \quad \text{------- (2)} \qquad \dot{\varepsilon}_{2,i} + E_1/\eta\cdot\varepsilon_{2,i} = (\sigma_i - \sigma_y)/\eta \quad \text{------------- (3)}$$

式(3)の一般解は，次のようにえられる。

$$\varepsilon_{2,i} = \exp\left(-\int E_1/\eta\,dt\right)\left\{\varepsilon_{2,i-1} + 1/\eta\int(\sigma_i-\sigma_y)\exp(E_1/\eta\,dt)\,dt\right\} \quad \text{------------ (4)}$$

ここで，時刻 i と $i-1$ との微小時間間隔を t_0 とし，$E_1/\eta\cdot t_0$ を β とおき，無次元化すれば式(4)は次のとうりとなる。

$$\bar\varepsilon_{2,i} = (\beta/2\cdot\bar\sigma_i - 1)/\bar E_1 + \left\{\bar\varepsilon_{2,i-1} + (\beta/2\cdot\bar\sigma_{i-1}+1)/\bar E_1\right\}e^{-\beta} \quad \text{------------ (5)}$$

よって，全ひずみ $\bar\varepsilon_i$ は，式(2)および式(5)を用いて，次のように表わされる。

$$\bar\varepsilon_i = (1+\beta/2\bar E_1)\bar\sigma_i - 1/\bar E_1 + \left\{\bar\varepsilon_{2,i-1} + (\beta/2\cdot\bar\sigma_{i-1}+1)/\bar E_1\right\}e^{-\beta} \quad \text{------------ (6)}$$

iii) Step 3： スライダーを伴う部分は，再び最大ひずみ ε_{2m} で固定されるものとすれば，$\varepsilon_{2,i} = \varepsilon_{2m}$ となり，Step 1 と同様に全ひずみ $\bar\varepsilon_i$ は，次式でえられる。

$$\bar\varepsilon_i = \bar\sigma_i + \bar\varepsilon_{2m} \quad \text{------------ (7)}$$

iv) Step4： Step 2 の場合と同様にして，次のレオロジー方程式をうる。

$$E\varepsilon_{1,i} = \sigma_i \quad \text{------- (8)} \qquad \dot{\varepsilon}_{2,i} + E_1/\eta\cdot\varepsilon_{2,i} = (\sigma_i + \sigma_y)/\eta \quad \text{------------- (9)}$$

式(9)の一般解は，式(4)と同様な形で求められ，結局，全ひずみ $\bar\varepsilon_i$ は次のようになる。

$$\bar\varepsilon_i = (1+\beta/2\bar E_1)\bar\sigma_i + 1/\bar E_1 + \left\{\bar\varepsilon_{2,i-1} + (\beta/2\cdot\bar\sigma_{i-1}-1)/\bar E_1\right\}e^{-\beta} \quad \text{------ (10)}$$

以上の結果を整理すれば，任意の応力状態に対する応力ーひずみ式は，一般に次式で与えられる。

$$\bar\sigma_i = \nu_i(\bar\varepsilon_i - \bar\varepsilon_i^*) \quad \text{---- (11)} \qquad \text{（表-1参照）}$$

Step	ν_i	W_i	$\bar\varepsilon_i^*$
1	1	-1	$-\bar\varepsilon_{2m}$
2	$\frac{1}{1+\beta/2\bar E_1}$	W	$\left\{\bar\varepsilon_{2,i-1} + \frac{\beta}{2\bar E_1}\bar\sigma_{i-1} + \frac{1}{\bar E_1}\right\}e^{-\beta} - \frac{1}{\bar E_1}$
3	1	1	$\bar\varepsilon_{2m}$
4	$\frac{1}{1+\beta/2\bar E_1}$	W	$\left\{\bar\varepsilon_{2,i-1} + \frac{\beta}{2\bar E_1}\bar\sigma_{i-1} - \frac{1}{\bar E_1}\right\}e^{-\beta} + \frac{1}{\bar E_1}$

表 - 1

式(11)における各Stepの判別のフローチャートを図-2に示す。

2-2. 分布mass法による片持梁の強制振動解析

部材の各分割点間の自重が直線的に変化する片持梁に，$g = -m\alpha_s\sin\omega t$ なる分布強制力および慣性力 p が作用する場合，梁の各点のモーメントは，次式のように行列表示できる。

$$M = -(\alpha_p p + \alpha_g g) \quad \text{------------- (12)}$$

ここに，m：単位長さ当りの質量，α_s：変形加速度，ω：円振動数，α_p, α_g：それぞれ慣性力および強制力の分布荷重が作用する場合の梁の分割数によって定まる係数行列。

ここで，式(12)の p および g をそれぞれ次のように表わす。

$$p = -m\ddot y, \quad g = -m\alpha_s\sin\omega t\,(1) \quad \text{------- (13)}$$

ここに，$\ddot y(=\alpha)$：たわみ加速度，m：質量行列，(1)：要素1の列行列

式(13)を式(12)に代入し，M を降伏モーメント M_y で無次元化して次式をうる。

$$\bar M = k\left\{\bar\alpha_p\ddot y + \bar\alpha_g\sin\omega t\,(1)\right\} \quad \text{------------ (14)}$$

ここに，$\bar M = M/M_y$，$k = m_0\alpha_s l^2/M_y$，m_0：基準の m，$\bar\alpha_p = \alpha_p/l^2$，$\bar\alpha_g = \alpha_g/l^2$，$l$：スパン長。

また，たわみ y は ϕ−法公式を用いて，次のように求められる。

$$y = a\phi l^2 \qquad a：係数行列 \quad \text{------------ (15)}$$

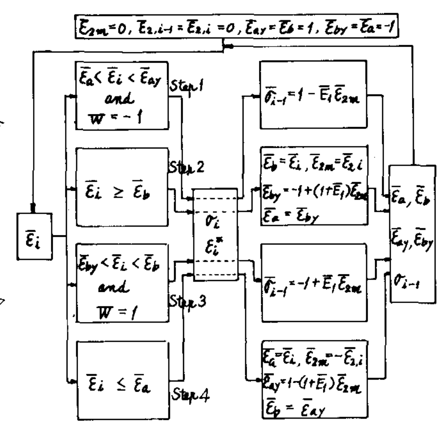


図 - 2

ここで，たわみyを静的たわみ$y_s(=\alpha_s/\omega_0^2$, α : g_s/m, ω_0 : 固有円振動数）および曲率ϕを降伏曲率$\phi_y(=M_y/EI)$で無次元化すれば，式(15)は次のように変形される。

$$\bar{y} = \xi a \bar{\Phi} \quad (\text{ここに，} \xi = \phi_y l^2/y_s = M_y l^2/EIy_s) \qquad (16)$$

また，曲率$\bar{\Phi}$は弾性，塑性にかかわらず，一般に次式で表わされる。

$$\bar{\Phi} = \bar{M} + \bar{\Phi}^p \quad (\text{弾性時において} \ \bar{\Phi}^p = 0) \qquad (17)$$

式(17)を式(16)に代入し，さらに式(14)を用いれば，たわみ$\bar{y}$は結局次式でえられる。

$$\ddot{\bar{y}} = -1/s \cdot A\bar{y} + B\bar{g} + 1/\kappa \cdot C \qquad (18)$$

ここに，$A = K_p^{-1}$, $B = K_p^{-1} a \bar{\alpha}_g$, $C = K_p^{-1} a \bar{\Phi}^p$, $K_p = a\bar{\alpha}_p m$, $s = \kappa/\xi$

式(18)の微分方程式の解法として，i)差分法，ii) Milne法，iii)線型加速度法などが考えられるが，ここでは，収束性のよい線型加速度法を採用する。

まず，時刻$i+1$におけるたわみy_{i+1}，たわみ速度$\dot{y}_{i+1}$およびたわみ加速度$\ddot{y}_{i+1}$はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \dot{y}_i \Delta t + \tfrac{1}{2}\ddot{y}_i \Delta t^2 + \tfrac{1}{6}\dddot{y}_i \Delta t^3 \\ \dot{y}_{i+1} &= \dot{y}_i + \ddot{y}_i \Delta t + \tfrac{1}{2}\dddot{y}_i \Delta t^2 \\ \ddot{y}_{i+1} &= \ddot{y}_i + \dddot{y}_i \Delta t \qquad (\Delta t = t_{i+1} - t_i) \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

式(19)の第3式を第1式に代入し，行列表示した後，静的たわみy_sで無次元化すれば次式をうる。

$$\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + 2\pi k \bar{v}_i + \frac{4}{3}\pi^2 k^2 \bar{\alpha}_i + \frac{4}{6}\pi^2 k^2 \bar{\alpha}_{i+1} \qquad (20)$$

ここに，$k(=\Delta t/T_0)$: 時間間隔，$T_0 = 2\pi/\omega_0$ ， $\bar{v}_i = \dot{\bar{y}}_i$

さらに，加速度$\ddot{\bar{y}}$を$\bar{\alpha}$で，速度$\dot{\bar{y}}$を$\bar{v}$で置換して，式(18)の時刻$i+1$の式と式(20)を連立させて$\bar{\alpha}_{i+1}$について解けば次式がえられる。 $\bar{\alpha}_{i+1} = U^{-1}(V + W)$ (21)

ここに，$U = I + (2\pi^2 k^2/3s)A$ ， $V = -1/s \cdot A(\bar{y}_i + 2\pi k \bar{v}_i + \frac{4}{3}\pi^2 k^2 \bar{\alpha}_i)$

$W = B\bar{g}_{i+1} + 1/\kappa \cdot C_{i+1}$ ， I : 単位行列

また，速度$\dot{\bar{y}}_{i+1}(=\bar{v}_{i+1})$は，式(20)の第3式を第2式に代入して次のように求められる。

$$\dot{\bar{y}}_{i+1} = \bar{v}_{i+1} = \bar{v}_i + \pi k(\bar{\alpha}_i + \bar{\alpha}_{i+1}) \qquad (22)$$

さらに，求められた$\bar{\alpha}_{i+1}$を，式(14)に代入することによって，所要の$\bar{M}_{i+1}$が次式のように算定される

$$\bar{M}_{i+1} = \kappa\{\bar{\alpha}_p \bar{\alpha}_{i+1} + \bar{\alpha}_g \sin\omega t_{i+1} (1)\} \qquad (23)$$

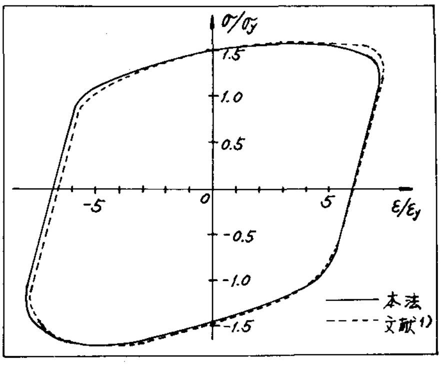
3. 算例および考察

まず，$\sigma = \sigma_a \sin\omega t$の正弦波負荷を与えた場合の，応力－ひずみ曲線を図-3に示す。ここに用いた諸量は次のとおりである。

振動数 $f = 1/T_0 = \omega/2\pi = 3.73$ cps ， $\sigma_a = 4240$ kg/cm^2

$E = 2.1\times10^6$ kg/cm^2 ， $E_1 = 7.62$ kg/cm^2 ，

$\eta = 4.45\times10^3$ kg·sec/cm^2 ， $\sigma_y = 2.67\times10^3$ kg/cm^2

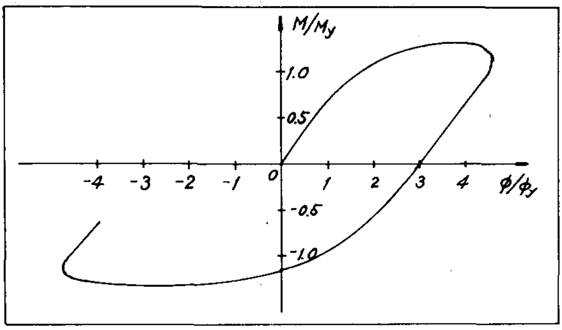


図－3

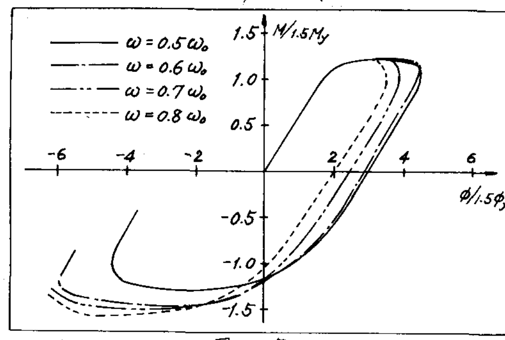
また，上述の結果および文献2)の結果を併用して求めた，モーメントM－曲率ϕの関係を図-4に示す。

さらに，$g = g_s \sin\omega t$ ($g_s = 2M_p/l^2$)を受ける片持梁4等分分布massの振動解析を行ない，各円振動数に対する固定端のM-ϕカーブ，自由端のたわみおよび固定端のモーメントをそれ

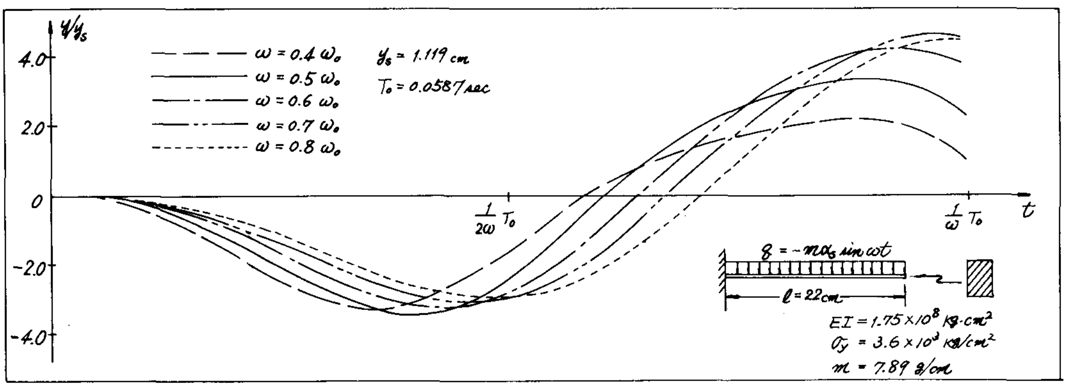
ぞれ図5，図-6および図-7に示す。ただし，静的たわみ $y_s=1.119cm$，塑性モーメント $M_p(=1.5M_y)=2.5\times10^6 kg\cdot cm$ および固有周期 $T_0=0.0587 sec$ を用いている。これらの結果から粘性を考慮することによって，弾性負荷から粘弾塑性負荷への，さらに粘弾塑性負荷から弾性除荷への遷移点において，M−φカーブはかなりなめらかな曲線を描いており，実際の鋼材の動的挙動特性とよく合致する結果がえられている。



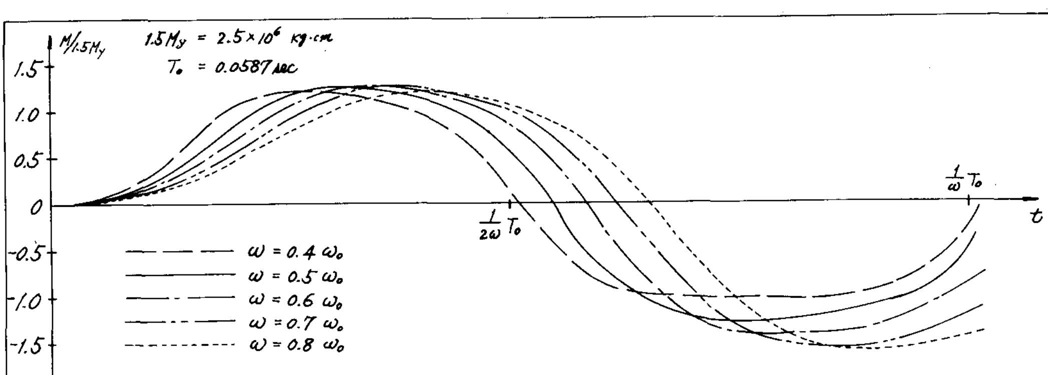
図－4



図－5



図－6



図－7

4. 結び　本研究において，粘弾塑性動的負荷に対する基礎理論が確立された。計算例を簡単な片持梁に限定したが，連続ばり，アーチなどの他種構造物にも応用可能であり，これらについても追って報告するつもりである。

参考文献　1) 渡辺啓行：「軟鋼の動的弾塑性復元力特性」，土木学会論文集 No.182，1970−10

2) 太田俊昭：「変動荷重を受ける梁の動的弾塑性解析」，第18回橋梁構造工学研究発表会論文集，1971−12