

大阪工業大学

正員 岡村宏一

東洋技研コンサルタントKK

正員 O吉田公憲

1. まえがき; 長方形板の後座屈領域の挙動について、最近、かなりの研究例がみられる。(しかしながら、非線形弾性領域からさらに弾塑性領域に転移していく過程を忠実に追跡した解析例は、目下のところ数少ないようである。

筆者は、すでに、大たわみを伴う長方形鋼板、およびリブ付き板の横荷重による弾塑性曲げ問題の1解法を発表した。¹⁾ また、この解法を発展させ、一対辺に圧縮を受けろ長方形鋼板の弾塑性座屈の解析を行ない、板厚比、辺長比、降伏応力などの広範囲の変化に伴う終局強度のデータを求め、既往の実験値と比較し、良好な一致を見た。²⁾ ところで、本文は、水平、ならびに鉛直補剛材を有する長方形鋼板の弾塑性曲げ座屈に関する研究の一部を報告するもので、この種の板の崩壊機構を明らかにすると同時に、補剛材の剛度、および配置が、板の終局強度におよぼす影響を調べようとするものである。

2. リブと合成される板の基礎式と、その解の誘導;

図-1に示す厚さ h の板の微小エレメントについて、リブとの合成面に作用する予静定力として、鉛直力、 Q_u 、 x, y 方向の水平せん断力をそれぞれ、 S_x, S_y 、とし、板のたわみを W 、初期たわみを W_0 、曲げモーメント、および軸力の介値を $M_x, M_y, M_{xy}, N_x, N_y, N_{xy}$ 、で表わし、応力関数中、中央面における塑性ポテンシャル ϕ 、を導入すれば、板の基礎式は、つぎのように書かれる。

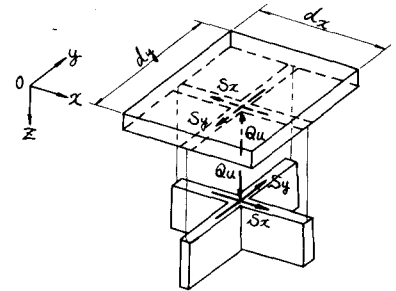


図-1

$$\Delta\Delta W = \frac{1}{D} \left\{ Q_u - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} \right) + h \cdot \Pi(x, y) \right\} - \frac{4}{h} \int_L \{ \psi(x, y) \} L \dots \dots \dots (1)$$

$$\Delta\Delta\phi = \frac{1}{h} \left\{ \nu \left(\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int S_x dx - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int S_y dy \right\} + E \left\{ \Lambda(x, y) - \int_L \{ \Gamma(x, y) \} L \dots \dots \dots (2)$$

ただし、 D : 板の曲げ剛度 $= E \cdot h^3 / 12 \cdot (1 - \nu^2)$ 、 E : 弾性係数、 ν : ポアソン比、である。
 式中、 $\Pi(x, y)$ 、 $\Lambda(x, y)$ 、は、面内力に関する非線形関数で、

$$\Pi(x, y) = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{h} \int S_x dx \right) \cdot \frac{\partial^2 (W+W_0)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (W+W_0)}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{h} \int S_y dy \right) \frac{\partial^2 (W+W_0)}{\partial y^2} \dots \dots \dots (3)$$

$$\Lambda(x, y) = \left\{ \frac{\partial^2 (W+W_0)}{\partial x \partial y} \right\}^2 - \frac{\partial^2 (W+W_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 (W+W_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \dots \dots \dots (4)$$

また、 $\psi(x, y)$ 、 $\Gamma(x, y)$ 、は、荷重段階 (L) に対応し、塑性変形に從属する非線形関数で、

- 1). 岡村、吉田; 大たわみ、およびリブの補剛を考慮した長方形鋼板の弾塑性解析, 論文報告集, No.196, 1971.
- 2). 岡村、吉田; 長方形薄鋼板の弾塑性座屈の解析(続), 土木学会関西支部講演概要I, 1972, (論文報告集に投稿中).

$$\left. \begin{aligned} \Psi(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mu \cdot m) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\mu \cdot m') + 6(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\mu \cdot m_{xy}) \\ \Gamma(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\mu \cdot n) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mu \cdot n') - 6 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\mu \cdot n_{xy}) \end{aligned} \right\} \text{-----(5)}$$

$$m = (2-\nu)m_x - (1-2\nu)m_y, \quad m' = (2-\nu)m_y - (1-\nu)m_x, \quad n = 2n_x - n_y, \quad n' = 2n_y - n_x,$$

ここで, $m_x = M_x/M_p, \quad m_y = M_y/M_p, \quad m_{xy} = M_{xy}/M_p, \quad n_x = N_x/N_p, \quad n_y = N_y/N_p, \quad n_{xy} = N_{xy}/N_p,$

$M_p = \hat{\sigma}_p \cdot h^2/4, \quad N_p = \hat{\sigma}_p \cdot h, \quad \hat{\sigma}_p$: 降伏応力, μ は, 塑性変形中変化するスカラー量である。

式(5)の $\Psi(x,y), \Gamma(x,y)$ は, 塑性ポテンシヤルに关联して, つぎの近似降伏面を採用することにより得られる。

$$f = m_x^2 - m_y^2 - m_x \cdot m_y + 3m_{xy} + n_x^2 + n_y^2 - n_x \cdot n_y + 3n_{xy}^2 \text{-----(6)}$$

また, 断面力, および x, y 方向の変位 u, v は, 以下のように表示される。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{4}{h} \sum_L (\mu \cdot m)_L \right\} & N_x &= h \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \int S_x dx \\ M_y &= -D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{4}{h} \sum_L (\mu \cdot m')_L \right\} & N_y &= h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \int S_y dy \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{12}{h} \sum_L (\mu \cdot m_{xy})_L \right\} & N_{xy} &= -h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \text{-----(7)}$$

$$u = \left\{ \left[\frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_y) + \sum_L (\mu \cdot m)_L - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial(w+w_0)}{\partial x} \right\}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] dx + u_0 \right\} \text{-----(8)}$$

$$v = \left\{ \left[\frac{1}{Eh} (N_y - \nu N_x) + \sum_L (\mu \cdot m')_L - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial(w+w_0)}{\partial y} \right\}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] dy + v_0 \right\} \text{ (} u_0, v_0 \text{: 剛体変位)}$$

式中, 非線形項の積分は, 和分に置換して処理する。

本文で取りあつた長方形板は, 図-2に示すように x 方向両辺に, モーメント(M)を受け, つぎの境界条件を有するものである。

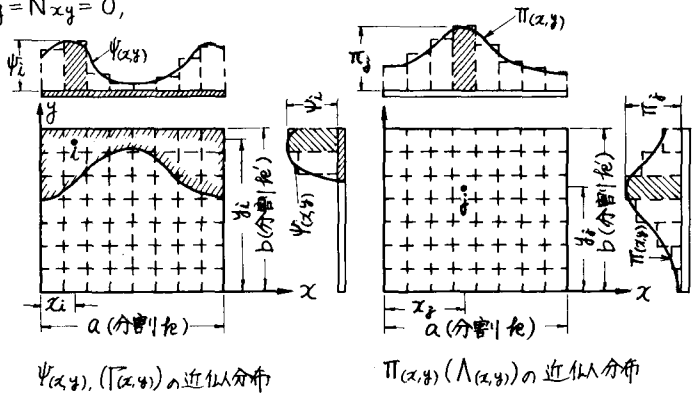
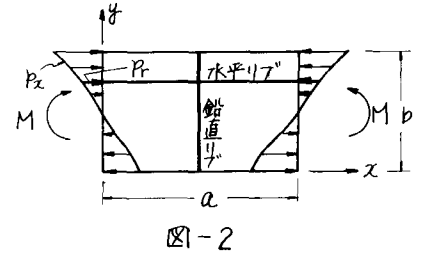
$$x = 0, a \text{ 辺} \text{-----} w = M_x = v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \text{一定}$$

$$y = 0, b \text{ 辺} \text{-----} w = M_y = N_y = N_{xy} = 0,$$

式(1), (2)の解析にあたり, $\Psi(x,y), \Gamma(x,y), \Pi(x,y), \Lambda(x,y)$, および合成面に作用する非静定力の分布を, 図-3, 図-4, に示すような, 矩形分布の連続体に近似する。

さらに, 図-2に示す, 作用モーメント(M)の分布 $P(x)$ を, 図-5に示すような, 三角形分布の和で近似する。

これより, 非線形方程式, (1), (2),



の解, W , Φ は, Fourier 級数による連続解として, つぎのよ
うに求められる.

$$W = \frac{16}{\pi^2} \sum_m \left[\frac{1}{D} \left\{ h \sum_j \Pi_j \bar{F}_j + \sum_r \sum_s q_{rs} \bar{F}_{rs} \right\} - \frac{4}{h} \sum_L \sum_L (\Psi_i)_L \bar{F}_i \right] \times \sin dm x \quad (9)$$

$$\Phi = \frac{16}{h \pi^2} \sum_m \left\{ h E \sum_j \Lambda_j \bar{F}_j + \frac{h}{2} \sum_k P_k \cdot G_k + \sum_r \sum_s t_{rs} \cdot I_{rs} + \sum_r \sum_{s'} t_{rs'} \cdot \bar{I}_{rs'} - h \cdot E \sum_k \sum_L (T_i)_L \bar{F}_i \right\} \times \sin dm x \quad (10)$$

式中,

$$F_j = \sum_n P_{mn} \sin dm x_j \cdot \sin \frac{n\pi}{2h} \cdot \sin \beta_n y_j \cdot \sin \frac{n\pi}{2h} \cdot \sin \beta_n y,$$

$$F_{rs} = \sum_n P_{mn} \sin dm x_s \cdot \sin dm c_s \cdot \sin \beta_n y_s \cdot \sin \beta_n dr \cdot \sin \beta_n y,$$

$$\bar{F}_j = \sum_n P_{mn} \sin dm x_j \cdot \sin \frac{n\pi}{2h} \cdot \sin \beta_n y_j \cdot \sin \frac{n\pi}{2h} \cdot Y_{mn}(y),$$

$$G_k = \sum_n \frac{1}{dl} \frac{d_m^2}{\beta_n} \left(\frac{\beta_n^2}{d_m^2} - \nu \right) \cdot P_{mn} \cdot \sin \beta_n y_k (1 - \cos \beta_n dl) \cdot Y_{mn}(y),$$

$$I_{rs} = \sum_n \alpha_m \left(\frac{\beta_n^2}{d_m^2} - \nu \right) \cdot P_m \cdot \cos dm x_s \cdot \sin dm c_s \cdot \sin \beta_n y_r \times \sin \beta_n dr \cdot Y_{mn}(y),$$

$$P_{mn} = \{ m \cdot n (d_m^2 + \beta_n^2) \}^{-1}, \quad \alpha_m = 1 - K_m^2,$$

$$Y_{mn}(y) = \sin \beta_n y + \frac{\beta_n}{\alpha_m \mu_m} \{ \eta_m(y) - (-1)^n \bar{\eta}_m(y) \},$$

$$\eta_m = K_m^2 \sinh \alpha_m y + \alpha_m y \{ (\delta_m - K_m \gamma_m) \sinh \alpha_m y - \cosh \alpha_m y \},$$

$$\bar{\eta}_m = K_m \sinh \alpha_m y + \alpha_m y \{ (K_m \delta_m - \gamma_m) \sinh \alpha_m y - K_m \cosh \alpha_m y \},$$

$$K_m = \frac{1}{\lambda} m \pi \operatorname{cosech} \frac{1}{\lambda} m \pi, \quad \delta_m = \coth \frac{1}{\lambda} m \pi, \quad \gamma_m = \operatorname{cosech} \frac{1}{\lambda} m \pi,$$

$$\alpha_m = m \pi / a, \quad \beta_n = n \pi / b, \quad \lambda = a / b,$$

$F_i, \bar{F}_{rs}, \bar{F}_i, \bar{I}_{rs},$ も同様に得られる.

これらの諸係数は, 各作用力の分布範囲が定まれば, 板の任意点に対する影響係数として, 前もって与えられ, それぞれ独自に十分な収束値が求められる. また, これらの係数は, 2重級数であるが, 根拠公式を用いて, 単級数に変換し, 計算することができる.

式(9)(10)に含まれる $(\Psi_i), (T_i),$ は, 式(5)に示されるように, 未定係数 $\mu,$ およびその時点での断面力の2次微分を陰関数として含んでいる. これを線形化するために差分法を用いる(文献(1)参照). すなわち, 逐次計算のある段階で, 断面力の近似値を与えれば, $(\Psi_i), (T_i)$ は, μ の1次関数となる.

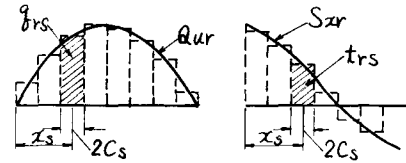
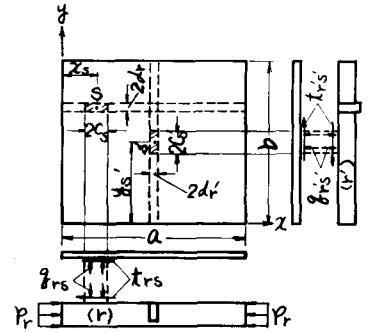


図-4

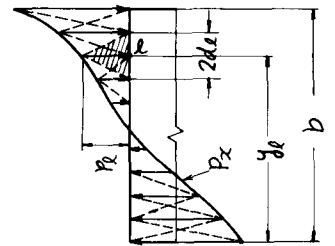


図-5

3. リブの基礎式とその解の誘導;

水平方向リブ(r)について見ると、図-4に示したような、不静定力、ならびに図-6に見るような、たためみ、塑性化の影響が考えられる。

リブのたためみを W_r 、曲げ剛度を $E \cdot I_r$ [本文では、リブ断面を矩形断面 ($B_r \times H_r$) とする。]、曲げモーメント、および軸力を、 M_{xr} 、 N_{xr} とすると、リブ(r)の基礎式は、つぎのように書かれる。

$$\frac{d^4 W_r}{dx^4} = \frac{1}{E \cdot I_r} \left\{ q_{rs} - \frac{H_r}{2} \cdot \frac{dS_{xr}}{dx} + \Pi'_r(x) \right\} - \frac{4}{H_r} \sum_L \left\{ \Psi'_r(x) \right\} \quad (11)$$

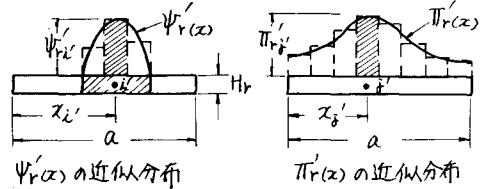


図-6

式中、 $\Pi'_r(x)$ 、 $\Psi'_r(x)$ は、板と同様、面内力、および塑性変形に從属する関数で、

$$\Pi'_r(x) = N_{xr} \cdot \frac{\partial^2 W_r}{\partial x^2}, \quad \Psi'_r(x) = \frac{d^2 U_r}{dx^2} \quad (12)$$

ここで、 U_r は、リブ(r)の塑性化した点において、塑性変形中変化するスカラー量である。

また、リブの降伏条件は、

$$f_r = |m_{xr}| + (n_{xr})^2 = 1 \quad (13)$$

ただし、 $m_{xr} = M_{xr}/M_{pr}$ 、 $n_{xr} = N_{xr}/N_{pr}$ 、 $M_{pr} = \sigma_p \cdot B_r \cdot H_r^2/4$ 、 $N_{pr} = \sigma_p \cdot B_r \cdot H_r$

図-6に示した、 Ψ_{ri}' は、 U_r の2次微分の形となっているが、板の場合と同様に差分法を用い、 U_r の1次関数として表わされる。すなわち、式(11)の解は、 U_r を1次で含んだ代数解として求められる。

4. 合成条件式と境界条件式、

合成条件式は、合成面に採った選点 (x_s, y_r) において、板、およびリブのたためみ、水平変位を等置とあくことより得られる。

式(9)(10)は、y方向対辺における境界条件のすべてと、x方向対辺における、 $W = M_y = V = 0$ 、を満足している。したがって、境界条件式は、x方向対辺に採った選点 (y_e) において、 $\partial W / \partial y =$ 一定、とあくことより得られ、さらに、つぎの式が附加される。

$$\left. \begin{aligned} \sum_e dl \cdot h \cdot P_e + \sum_r B_r \cdot H_r \cdot P_r &= 0, \\ \sum_e dl \cdot h \cdot P_e \cdot y_e + \sum_r B_r \cdot H_r \cdot P_r \cdot y_r &= M \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

以上の諸条件式から、連立方程式の解として、未知量、 $P_e, q_{rs}, t_{rs}, f_r, s', t_r, s', P_r$ を定めることが出来る。

なお、弾塑性解析を行うための逐次計算の方法、ならびに塑性化した各点における U, U_r を定めるための降伏条件の扱いについては、記述を省略するが、文献(1)を参照されたい。

計算データは、講義時に述べる。