

東京大学工学部 正員 奥村敏志
 〃 〃 西野文雄

東京大学工学部 学生員 長谷川勲夫
 日本国有鉄道 正員 長 次 正 孝

1. 序 最近世界各国においてボクスガタ板の等価単板が発表されており、その原因解明の中で圧縮ラジエーションの座屈崩壊に因って縦リブの所帯剛性が問題となっている。DINで規定するいわゆる最小剛比 δ^* についても残留応力、初期不平等等の初期不整を考慮すると、実際に縦リブ線が節線となる部は5%程度の剛性が必要であるとの議論もある。筆者等は従来の残留応力のある板構造の弾塑性座屈の問題を差分法により解析した。本論文の目的は等価単板と縦リブを有する板の弾塑性座屈を残留応力考慮して計算出来る事論じ、その計算例を示し、そのものである。

2. 差分計算式の誘導

2-1 無補剛の板の弾塑性座屈の差分評価式

リブ付板の弾塑性座屈差分評価式を導く前に、その式の誘導に必要となるリブを有する板の差分評価式を導く。一般に弾塑性座屈を考慮する時、板のモント-曲率関係の面内セ-断力がある場合、(2-1)式で与えられる。このマトリクスを用いると平板座屈の基礎方程式は(2-2)式のように表現出来る。

$$M = D \cdot \varphi ; \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D_0 \cdot \begin{Bmatrix} R_1 & R_2 & 0 \\ R_2 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & R_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -w_{xx} \\ -w_{yy} \\ 2w_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{但し} \quad D_0 = \frac{Et^3}{12} \quad (2-1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (D_0 R_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_0 R_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) + 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (D_0 R_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (D_0 R_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_0 R_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2-2)$$

載荷面単純支持の事より(2-2)式を常微分方程式に変換して、一次差分による差分評価式を導くと(2-3)、(2-4)式のように表現出来る。(節点iにおける差分評価式)

$$C_{1,i} Y_{i+2} + C_{2,i} Y_{i+1} + C_{3,i} Y_i + C_{4,i} Y_{i-1} + C_{5,i} Y_{i-2} = C_i \cdot \lambda^2 Y_i \quad (2-3)$$

但し、 $C_{1,i} = \frac{1}{2} R_{2,i+1} + R_{3,i} - \frac{1}{2} R_{3,i-1}$
 $C_{2,i} = -2 \left(\frac{1}{2} R_{2,i} - R_{3,i-1} \right) - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \left(\frac{1}{2} R_{2,i+1} + 2 R_{2,i} - \frac{1}{2} R_{2,i-1} + R_{4,i+1} + 4 R_{4,i} - R_{4,i-1} \right)$
 $C_{3,i} = -2 \left(R_{3,i+1} - 3 R_{3,i} + R_{3,i-1} \right) + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \left(\frac{1}{2} R_{2,i+1} - R_{2,i+1} + 6 R_{2,i} - R_{2,i-1} + 8 R_{4,i} + \left(\frac{b}{a} \right)^2 R_{4,i} \right)$
 $C_{4,i} = 2 \left(R_{3,i+1} - 3 R_{3,i} \right) - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \left(\frac{1}{2} R_{2,i+1} + 2 R_{2,i} + \frac{1}{2} R_{2,i-1} - R_{4,i+1} + 4 R_{4,i} + R_{4,i-1} \right)$
 $C_{5,i} = -\frac{1}{2} R_{3,i+1} + R_{3,i} + \frac{1}{2} R_{3,i-1}$
 $C_i = \frac{12Et^3}{12} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \left(\frac{D_0}{D_0} \right); \quad \lambda = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{D_0}{E}}$ ∴ 板中bはπ正方向に分割

$$M_y = -D_0 \sin \frac{\pi x}{a} \left\{ -R_2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 Y + R_3 Y'' \right\}, \quad V_y = -D_0 \sin \frac{\pi x}{a} \left\{ -\left(\frac{b}{a} \right)^2 R_2 Y - \left(\frac{b}{a} \right)^2 (R_2 + 4R_4) Y' + R_3 Y'' + R_4 Y''' \right\} \quad (2-5)$$

上記を考慮する時、板座屈を差分計算する場合の境界条件が得られる。以上を用いて残留応力のある無補剛板の弾塑性座屈解析が実行出来る。

2-2 縦リブを有する板の弾塑性座屈の差分評価式

∴では図1-a)に示すように、任意の縦リブを有する板が一方に任意の分布する圧縮力を受けている場合の弾塑性座屈を取り扱う。今、図1-b)に示すように1本の縦リブと隣接する板部分をとり上げ、図1-c)に示すように縦リブを境に板部分をl-plate, m-plateに分け、両方の板のモントM, 等価セ-断力Vの合力をqリブが受けているものと与える。このように与える時、リブ板の結合連続条件は(2-6)式のように与えられる。

変位境界条件

$$w_l = w_m = w_s$$

$$\varphi_s = \frac{\partial w_s}{\partial y} = \frac{\partial w_m}{\partial y}$$

力学境界条件

$$a) \quad Et I \frac{d^4 w_s}{dx^4} + A \bar{\sigma}_s \frac{d^2 w_s}{dx^2} = 8 \quad c)$$

$$b) \quad EI_w \frac{d^4 \varphi_s}{dx^4} + (A \bar{\sigma}_s \cdot I_s^2 - GK) \frac{d^2 \varphi_s}{dx^2} = m_T \quad d)$$

∴リブに作用する分布横力q, 合力のm_Tは(2-7)式で与えられる。

$$8 = (V_y)_m - (V_y)_l, \quad m_T = (M_y)_l - (M_y)_m \quad (2-7)$$

差分化を行うにあたっては、2-1と同様にしてl-plate, m-plate, リブ共にx方向(圧縮方向)を半波のsinで仮定し、(2-8)式のように表示する。今簡単のため、リブの振れに対する抵抗を無視し、(即ち、 $EI_w \varphi_s^4 + (I_s^2 - GK) \varphi_s^2 = 0$) $w_l = f(y) \cdot \sin \frac{\pi x}{a}$, $w_m = g(y) \sin \frac{\pi x}{a}$, $w_s = \delta_s \cdot \sin \frac{\pi x}{a}$ (2-8)

これ(この)一般にリブ付板の弾性解析に用いられる仮定である。(2-6d)式で $m_T=0$ と $k \ll 2$ (2-5), (2-6), (2-7), (2-8)式を用いてリブ板の結合連続条件は未知函数 $f(y)$, $g(y)$, δ_s を用いて(2-9)式のように表示される。

$$f(a) = g(a) = \delta_s \quad a), \quad f'(a) = g'(a) \quad b), \quad f''(a) = g''(a) \quad d),$$

$$\text{但し, } a \text{ はリブ } [EtI(\frac{b}{L})^3 - A\delta_s(\frac{b}{L})^2] f(a) = R_3 D_0 [f''(a) - g''(a)] \quad c) \quad (2-9)$$

この点の座標がある。図2に示すように座標原点を l -plate ($f(y)$), m -plate ($g(y)$) 共に差角点 i とする(2-9) a), b), d) 式より(2-10)式の差角関係式が得られる。この関係より l -plate, リブ, m -plate を一体として差角方程式(1) $f_i = g_i = \delta_s, \quad f_{i-1} = g_{i-1}, \quad f_{i+1} = g_{i+1} \quad (2-10)$

を取り扱う場合は、リブを有する点 i の前後の $i-1, i+1$ における差角評(式(2-3)式)に一致する事になる。従って差角方程式におけるリブの影響の差角点 i の差角評(式(2-3)式)を求めると同時に(2-9)式を差角評とし、 l -plate, m -plate 共に差角点 i において(2-3)式が成立する事を用いて図2に示す仮想節点 $g_{i-2}, g_{i-1}, f_{i+1}, f_{i+2}$ を考え、有差角点 $f_{i-2}, f_{i-1}, f_i, g_{i+1}, g_{i+2}$ による差角評(式(2-3)式)を(2-10)式を用いて変換し整理して(2-3)式と同様の符号を用いて表すと(2-11)-(2-12)式のようになる。ここで、 δ は弾性時のリブの剛比(面積比)である。リブの塑性化、残留応力

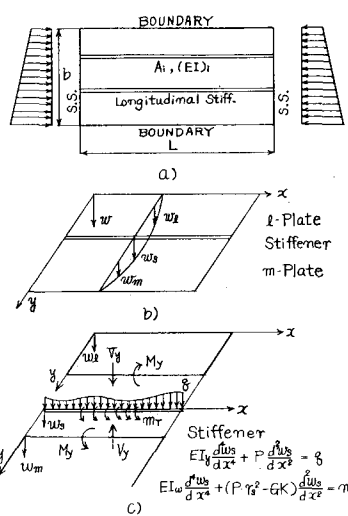


Fig. 1 Presentation of the Problem

$$S \cdot f_i = [S_1 - S_2 \lambda^2] \cdot f_i = \frac{R_2}{2} (f_{i+2} - f_{i-2} - g_{i+2} + g_{i-2}) \quad \text{但し, } S = S_1 - S_2 \lambda^2, \quad \lambda = \frac{b}{L} \sqrt{\frac{E}{E_s}} \quad (2-11)$$

$$S_1 = \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{b}{L}\right) \frac{\pi^4}{793} \eta \cdot \delta, \quad S_2 = 12 \left(\frac{b}{L}\right) \frac{\pi^2}{793} \xi \cdot \delta \quad \text{但し, } \delta = \frac{Et}{bD} \quad (D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}): \text{剛比, } \delta = \frac{A}{bt} : \text{面積比}$$

$$\eta = \frac{Et}{E} \text{ (リブの接線係数比)}, \quad \xi = \frac{\bar{\sigma}_s}{\sigma_T} \text{ (リブの平均圧縮応力比)} \quad (2-12)$$

の影響は η, ξ で評価される。次に l -plate, m -plate 両側の点の差角方程式を(2-3)式により表示し、(2-10)式を用いて(2-13)式のような条件が成立する。(2-11), (2-13)式を連立させて解くと仮想節点 f_{i+2}, g_{i-2} による有差角点 f_{i-2}, g_{i+2} $C_{5,i} f_{i-2} + C_{1,i} f_{i+2} = C_{5,i} g_{i-2} + C_{1,i} g_{i+2} \quad (2-13)$ を用いて(2-14)式のように表示される。 i 点における l -plate (及び m -plate) の差角評(式(2-3)式)を(2-10)-(2-14)式を用いて仮想節点 f_{i+2}, f_{i-2} (及び g_{i-2}, g_{i+2}) を考え、共通節点 f_i により表示すると結局リブを有する点 i における差角評(式(2-15), (2-16)式)により求められる。ここで $C_{5,i} (i=1 \sim 5), C_{1,i}$ は(2-4)式で与えられる。従って、リブがない場合は $S_2=0 (\delta=0)$, $S_2=0 (\delta=0)$ とし、(2-3)式に一致する。但し、 $D_{3,i} = C_{3,i} + \frac{1}{R_{2,i}} S_1 C_{1,i} C_{5,i}, \quad D_i = C_i + \frac{1}{R_{2,i}} S_2 C_{1,i} C_{5,i} \quad (2-15)$
 $(2-16)$

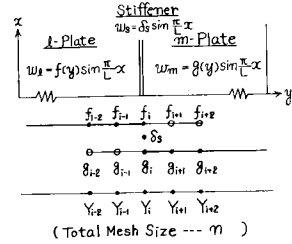


Fig. 2. Points of Finite Differences near the Stiffener

3. 残留応力を有するリブ付板の弾塑性性屈計算に対する適用

3-1. 計算手順 (2-15)式で求めた差角方程式を用いて残留応力を有するリブ付板の弾塑性性屈とリブ固有値方程式を構成する事にし、解く事が出来る。所、残留歪、外力による変形歪と存在差角点における剛性に決定し、これにより表示される(2-15)式の係数 $C_{5,i} (i=1 \sim 5), D_{3,i}, C_i, D_i$ を求めてリブを構成し、中厚比相当量 λ の固有値を計算する。ここでこの詳細については別紙の主題であるリブの影響に同じ留意すべき事項を述べる。

3-2. 残留応力を有するリブの接線係数、平均圧縮応力の評価 本解析においてはリブの弾塑性性 Beam-Column とする。(2-15)式の差角評(式)において与えられた S_1, S_2 を定める為にはリブの接線係数比 $\eta = \frac{Et}{E}$, 平均圧縮応力比 $\xi = \frac{\bar{\sigma}_s}{\sigma_T}$ 等の函数により表示される。これと与える例として、残留応力を有する中心圧縮柱の平均応力-歪関係を解析的に求める一般手法(C.R.C. Guide 2nd Ed. 1966 P.20)を用いられる。(実験的)短柱試験の平均応力-歪関係) 但し、本解析において図3に示すように基材を完全弾塑性性とし、残留応力を有する場合には、柱断面

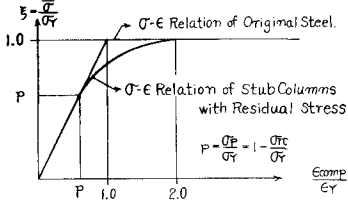


Fig. 3 σ - ϵ Relation of Stub Columns

弾塑性領域にある時、応力は前節の弾性域、塑性領域、弾性領域と塑性領域の連続性を保つ条件で3次曲線で近似する。弾塑性領域の範囲によって一定の残留圧縮応力 σ_{cr} が存在するとして、比例限界 σ_p と $\sigma_{cr} = \sigma_y - \sigma_{cr}$ とおき、引張残留量が減少してきているので外力歪が $2\epsilon_y$ になると、全塑性になることを。以上の仮定のもとに弾塑性域における平均応力 $y = \bar{\sigma}_y / \sigma_y$ 、外力歪 $x = \frac{\epsilon_{comp}}{\epsilon_y}$ の関係は(3-1)式のように求められる。

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (P \leq x \leq 2.0) \quad \text{但し、} \quad p = 1 - \frac{\epsilon_{rc}}{\epsilon_y} = 1 - \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} \quad (3-1)$$

$$a = -\frac{P}{(P-2)^3}, \quad b = \frac{2P^2 + P + 2}{(P-2)^3}, \quad c = -\frac{8(P^2 - P + 1)}{(P-2)^3}, \quad d = \frac{4(2P^2 - 3P + 2)}{(P-2)^3} + 1$$

以上より仮定された平均応力歪関係の曲線に対する荷重係数 $\eta = \frac{E\epsilon}{E}$ 、平均圧縮応力比 $\xi = \bar{\sigma}_y / \sigma_y$ は(3-2)式のように表される。

i) 弾性域 $0 < \frac{\epsilon_{comp}}{\epsilon_y} \leq P$; $\eta = 1, \xi = \frac{\epsilon_{comp}}{\epsilon_y}$ ii) 弾塑性域 $P < \frac{\epsilon_{comp}}{\epsilon_y} \leq 2$; $\eta = \frac{dy}{dx}, \xi = y$ iii) 塑性域 $\frac{\epsilon_{comp}}{\epsilon_y} > 2$; $\eta = 0, \xi = 1$ (3-2)

3-3. リブ付板の座屈応力に関する注意 本解析における、面内歪を与えて、リブ比相当量 $\frac{b}{\sqrt{E}}$ によって求める方法として、座屈応力 σ_y / σ_y 、面内歪 ϵ に別々に計算しなくてはならない。図1-a)に示す矩形板の長辺の縦リブがあるとき、それぞれの面積、面積比 A_j, δ_j ($j=1 \sim n$) とする。4角板面積、リブ面積の面積比にそれぞれ a_p, a_{sj} は(3-3)式のように表示される。又、板のときの平均圧縮応力は(3-4)式で与えられる。(但し、板の全体の斜り、両端荷重の差点を $1, m$)

$$a_p = \frac{bt}{\sum A_j + bt} = \frac{1}{1 + \sum \delta_j}, \quad a_{sj} = \frac{A_j}{\sum A_j + bt} = \frac{\delta_j}{1 + \sum \delta_j} \quad (3-3)$$

(3-3)(3-4)式を用いるリブ付板全体の $\left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y}\right)_0 = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} \right)_1 + \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} \right)_{m1} \right] + \sum_{i=2}^n \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} \right)_i$ (3-4)

作用する平均圧縮応力(座屈座屈応力) $\left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y}\right) = \frac{(\sigma_y / \sigma_y) \cdot bt + \sum_{j=1}^n (\bar{\sigma}_y / \sigma_y)_j \cdot A_j}{\sum A_j + bt} = \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y}\right)_0 \cdot a_p + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\bar{\sigma}_y}{\sigma_y}\right)_j \cdot a_{sj}$ (3-5)

4. 数値計算例と結果の検討 以上述べたリブ付板の弾塑性差分解法を用いて図4に示すような中央1本の縦リブを有する残留応力を有する圧縮板の弾塑性座屈を解析する。本計算における基本的仮定として i) 材料は完全弾塑性体とし ii) (3-1)式の板のポアソン曲率係数を規定する ν は $\nu = 0$ とし iii) 塑性変形理論、至るに $Bijlaard$ の理論を適用する。残留応力分布は非載荷重のリブ取付け部で急激にリブ引張力 σ_{cr} 、その両部で一定圧縮応力が発生しているとして、図4に示すように自己平衡初期応力分布を仮定する。図4に示す条件のもとに精度解析を行うと図4の結果に $Timoshenko$ の Energy 解^{*)} と比較して、極端に収束性が悪くなる。図5に従来の、多くの文献に記載されている残留応力がない場合のリブの寄与による座屈係数の変化を q/b の割合で本解析法を用いて求めた極端に精度よく解得されることを示すものである。本解析法における、従来の Energy 法^{*)}、微分方程式法^{*)}、座屈係数を仮定する必要がなく、自動的に最小固有値、この時の座屈係数を $Timoshenko$ の解析に求めたものと一致する。残留応力がある場合の q/b の関係を示したものが図6-1~4である。残留応力がある場合にはこの関係が外力歪(従って結果としての座屈応力)に変化する事に注意しなくてはならない。図6-1~4の残留圧縮応力比 $\sigma_{cr} / \sigma_y = 0.5$ 、中央リブの面積比 $\delta = 0.2$ で4辺単純支持の場合

に座屈応力(臨界応力)を無次元化して $\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y}$ (表示)を変化させた4つの例を示したものである。

これは、残留応力がない場合の連続板座屈時の座屈係数(長)は q/b の座屈応力の存在により、着

て低下し、又、この最小固有値が座屈応力によって変化するものであることがわかる。図7の図6-1~4の q/b の長割合を多く座屈係数 k を求めること。その結果を用いて求めた、中央リブ付板の座屈係数曲線を示したものである。この結果により、残留応力がある場合には、リブ付板の座屈係数(連続板座屈係数)は、必要の最小固有値 k が座屈応力によって変化する事が明らかになる。

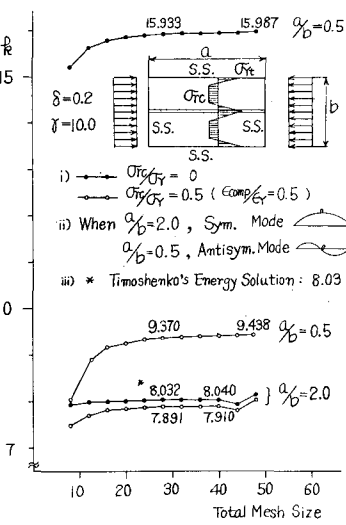


Fig. 4 Accuracy of Buckling Coefficient; k

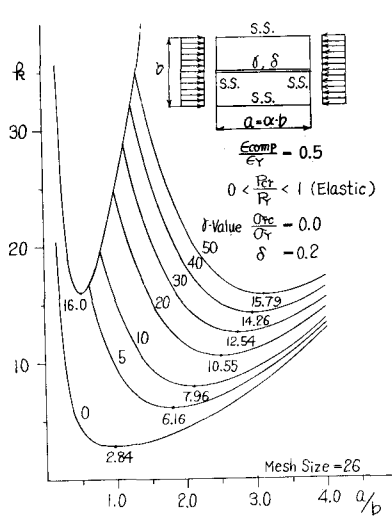


Fig. 5. $q/b \sim k$ Relations of Stiffened Plates free of Residual Stresses

*) $\sigma_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 t} = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)(b/t)^2} = 1.9 \times 10^6 \cdot k \frac{1}{(b/t)^2}$ ($E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$); $\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} = k \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2) \left(\frac{b}{t}\right)^2} = 0.90 k \frac{1}{\lambda^2}$ (黒文字表示)

即ち、残留応力が無い場合の線型 δ 値は、この場合約32 (DIN41141*)であるが、残留応力が存在する場合は、低い底底力段階において、それよりも、降伏応力に近い高底底力段階において δ の残留応力を考慮した線型 δ 値の値に達するようになる。これによって残留応力によりリブ自身の剛性低下(リブの接線係数 EI の低下)に起因するものと見られる。また、 δ の値

においても、残留応力の存在により、残留応力が無い場合と比較して、底底力 R が低下するの図に示すように明らかである。以上より、中央リブ取り付けた板中央リブの間の位置に2つのリブの間比を底底力に応じて変化させて設計されるべきであると見られるが、現在の設計の考え方の下に例としてDIN41141の線型 δ 値で図示してある高い底底力段階では、危険になる場合が危ないと思われる。この図7に示すように、 δ の値の所の底底力 R の値と高い底底力 R の値とを比較して、 δ の値の底底力 R に比較して大きく低下していることが明らかである。

5. 結語

本論文で述べられた結論は次の点である。
 i) 残留応力があるリブ板の弾塑性底底力解析(数値法を採用する)は、極めて簡単な解析で実現可能である。従来の範囲内において、 δ の値が有する種々の境界条件、箱型、I型等の板構造の圧縮あるいは曲げ底底力解析に適用する事が可能である。また、精度も比較的良く、次数の少ないマトリクス計算で解析が可能であり、経済的にも有利であると考えられる。

ii) 本解析法(一例として最も基本的な場合として中央一本のリブが有する純圧縮板の弾塑性底底力を残留応力を考慮に取り扱った)の結果、次の結論が得られる。即ち、残留応力を考慮しない場合にリブの剛性低下による最小剛性 δ の底底力 R の関数(図7)に示す線型 δ 値に基づいて高い底底力段階では、それよりも、降伏応力に近い高底底力段階においてリブ自身の剛性低下による線型 δ 値の値に達する。

6. 参考文献

1) Seminary London, April 1971, "Ultimate Resistance of Plate girders with Stiffened Webs - Summary Report, Bulletin IABSE No.27 1971. 2) Nishino, F. and Tall, L., "Residual Stress and Local Buckling Strength of Steel Columns", Proc. of JSCE No.172 1969-72 3) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. "Theory of Elastic Stability" 2nd Ed. McGraw-Hill, New York, 1961 4) Kollbrunner, C.F. and Meister, M. "Ausbeulen, Theorie und Berechnung von Blechen", Springer, 1958

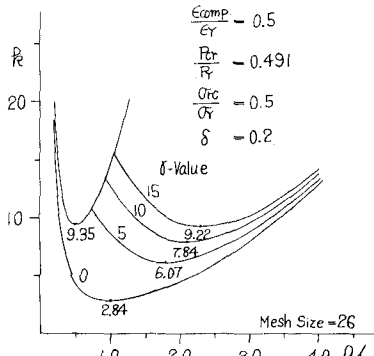


Fig. 6-2 a/b ~ R Relations of Stiffened Plates with Residual Stresses (2)

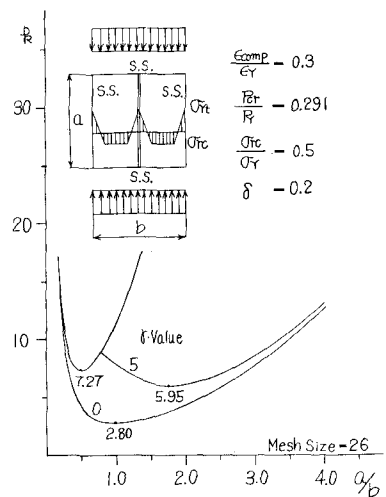


Fig. 6-1 a/b ~ R Relations of Stiffened Plates with Residual Stresses (1)

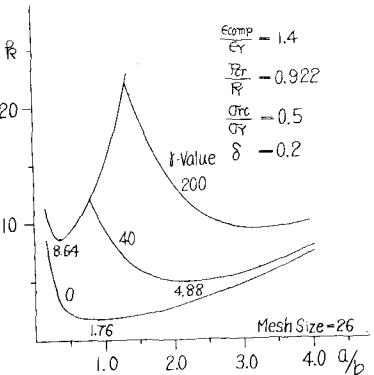


Fig. 6-4 a/b ~ R Relations of Stiffened Plates with Residual Stresses (4)

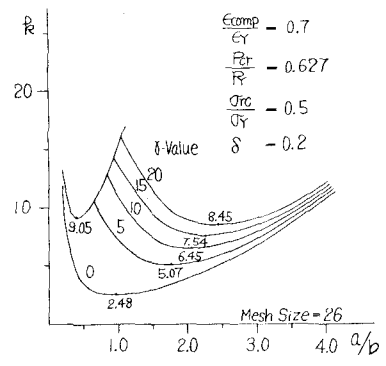


Fig. 6-3 a/b ~ R Relations of Stiffened Plates with Residual Stresses (3)

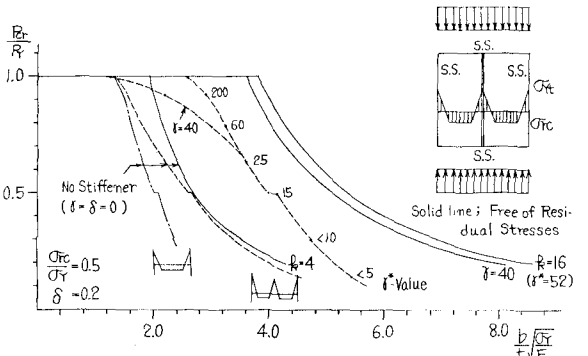


Fig. 7 Local Buckling Curves of Stiffened Plates with Residual Stresses