I-81　中間柱を有する平板の柱座屈に関する研究

九州大学　正員　樗木　武
〃　学生員　○井樋周介
長崎大学　正員　高橋和雄

1. 緒言

板を柱にて直接支える無梁板構造は板とはりの複合構造に比して，はりが突出していないために，空間の利用率が高く，採光，照明，通風に便利である。しかし，本構造は板を柱で直接支えることに起因して，その座屈安定上問題があり，実際設計に先立って，このことを十分解明しておくことが強く要望される。そこで，著者らは，無梁板構造の座屈安定について研究を進めるものであるが，本講演では，その成果の一部として中間に1本の柱を有する無梁板構造において，柱直上に集中荷重が，作用する場合の柱座屈について論ずるものである。

2. 解法原理

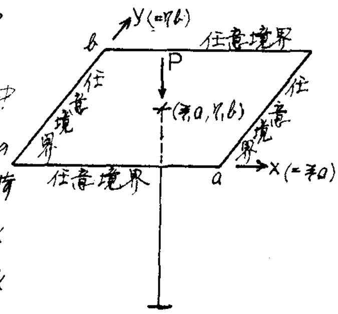

図 1.

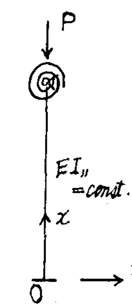

図 2.

図(1)に示すように，任意境界を有する矩形板が中間において，1本の柱で支えられるものとし，柱の位置を($\xi_1 a, \eta_1 b$)とする。柱の直上に，垂直集中荷重Pが作用する場合に，Pがある値を越えて大きくなれば，柱は座屈を起こし，曲げ変形を生じることになる。ところで，板と柱は剛結されているので，柱の曲げ変形に対し，板が抵抗することになる。この抵抗は板の曲げによるもので，これを一種の回転抵抗ばねと考えれば，そのばね定数を算定する必要がある。すなわち，図(1)のような状態を図(2)のような状態に置き換えて本題の座屈問題を解析するものである。板のばね定数は，文献(1)の無梁板構造解析のための基本系法により，容易に算定することができる。いま，柱と板との間に伝達される垂直反力をV_{11}，xおよびy方向の反力モーメントを，M^x_{11}，M^y_{11}とすれば，これらを求めるための基本連立方程式が次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} H^{11}_{11} & H^{x11}_{11} & H^{y11}_{11} \\ O^{11}_{11} & O^{x11}_{11} & O^{y11}_{11} \\ Q^{11}_{11} & Q^{x11}_{11} & Q^{y11}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} \\ -\frac{M^x_{11}}{a} \\ -\frac{M^y_{11}}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ab}{4}L_{11} - \frac{\mu D}{4a^2} d_{11} \\ \frac{ab}{4}L^x_{11} - \frac{\mu D}{4a}\theta^x_{11} \\ \frac{ab}{4}L^y_{11} - \frac{\mu^2 D}{4a}\theta^y_{11} \end{bmatrix} \quad \text{---------}(1)$$

ただし，H，O，Qは形状係数，Lは荷重項である（文献(1)参照）。

x方向の曲げ抵抗のばね定数を求める場合には，柱頭部にx方向の曲げモーメントを伝達しないようなローラー支承を挿入し，このような柱で支えられる無梁板構造に対して，柱直上の板に単位モーメントを荷重として加えるような力学系を想定すればよい。このとき，$d_{11}=0$，$M^x_{11}=0$となるから，式(1)は，次の内容となる。

$$\mathbb{A}_x \cdot \mathbb{X}_x = \mathbb{L}_x \quad \text{----------------}(2)$$

ここに，

$$\mathbb{A}_x = \begin{bmatrix} H^{11}_{11} & \frac{1}{\mu}H^{y11}_{11} \\ Q^{11}_{11} & \frac{1}{\mu}Q^{y11}_{11} + \frac{\mu^2 D}{4}\delta^{y}_{11} \end{bmatrix} \qquad \mathbb{X}_x = \begin{bmatrix} V_{11} \\ -\frac{M^y_{11}}{a} \end{bmatrix} \qquad \mathbb{L}_x = \frac{ab}{4}\begin{bmatrix} L_{11} \\ L^y_{11} \end{bmatrix}$$

また，S^y_{11}は柱頭部におけるy方向のたわみ角と，反力モーメントM^y_{11}との関係を表わす係数である。

$$(\theta^y_{11})_x = -S^y_{11}\cdot M^y_{11} \quad \text{------------}(3)$$

式(2)から

$$\mathbb{X}_x = \mathbb{A}_x^{-1}\cdot\mathbb{L}_x \quad \text{------------}(4)$$

式(4)を，式(1)の第2式に代入すれば，

$$[O_{11}\ \ \tfrac{1}{\mu}O^{y}_{11}]\cdot\mathbb{A}_x^{-1}\cdot\mathbb{L}_x = \frac{\mu a^2}{4}L^x_{11} - \frac{\mu D}{4a}(\theta^x_{11})_x \quad \text{------------}(5)$$

$$\therefore\ (\theta^x_{11})_x = \frac{4a}{\mu D}\left\{\frac{\mu a^2}{4}L^x_{11} - [O_{11}\ \ \tfrac{1}{\mu}O^{y}_{11}]\cdot\mathbb{A}_x^{-1}\cdot\mathbb{L}_x\right\} \quad \text{--------}(6)$$

求めんとするx方向のばね定数をb^x_{11}とすれば，これは$b^x_{11} = -1/(\theta^x_{11})_x$のように定義されるものであるから，これに式(6)を代入して，

$$b^x_{11} = -\mu D/4a\left\{\frac{\mu a^2}{4}L^x_{11} - [O_{11}\ \ \tfrac{1}{\mu}O^{y}_{11}]\cdot\mathbb{A}_x^{-1}\cdot\mathbb{L}_x\right\} \quad \text{---------}(7)$$

を得る。全く同様にして，柱頭部にy方向の曲げモーメントを伝達しないようなローラー支承を挿入のうえ解析すれば，xおよびy方向のたわみ角$(\theta^x_{11})_y$，$(\theta^y_{11})_y$，y方向のばね定数$b^y_{11} = -1/(\theta^y_{11})_y$を求めることができ，次のとおりである。

$$(\theta^x_{11})_y = -S^x_{11}\cdot M^x_{11} \quad \text{------------}(8)$$

$$(\theta^y_{11})_y = \frac{4a}{\mu D}\left\{\frac{\mu a^2}{4}L^y_{11} - [Q_{11}\ \ Q^{x}_{11}]\cdot\mathbb{A}_y^{-1}\cdot\mathbb{L}_y\right\} \quad \text{---------}(9)$$

$$b^y_{11} = -1/(\theta^y_{11})_y = -\mu^2 D/4a\left\{\frac{\mu a^2}{4}L^y_{11} - [Q_{11}\ \ Q^{x}_{11}]\cdot\mathbb{A}_y^{-1}\cdot\mathbb{L}_y\right\} \quad \text{--}(10)$$

ところで，柱の座屈方向は，x方向またはy方向のみに起こるとは限らないので，任意方向のばね定数を算定することが必要となるが，これは，式(3)，(6)，(8)，(9)より容易に求めることができる。すなわち，求めようとする方向に単位モーメント$M=1$を作用させれば，それらはxおよびy方向のモーメント成分に分けることができ，$M_c=\cos\gamma$，$M_s=\sin\gamma$で与えられる（図(3)参照）。

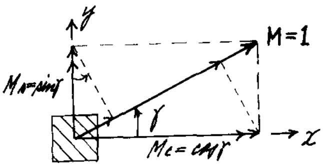

図3. 柱位置(表a, No.b)

これらモーメント成分M_c，M_sを個々に作用させたときの柱直上の板のxおよびy方向の回転角$(\theta^x_{11})_c$，$(\theta^y_{11})_c$および$(\theta^x_{11})_s$，$(\theta^y_{11})_s$は既に求めた式(3)，(6)，(8)，(9)の結果にM_c，M_sを乗ずることにより容易に求めることができ，これらを，重ね合せることにより，任意方向に単位モーメント$M=1$をかけたときのその点のxおよびy方向のたわみ角が次のように得られる。

$$\begin{bmatrix}\theta^x_{11}\\ \theta^y_{11}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(\theta^x_{11})_c + (\theta^x_{11})_s\\ (\theta^y_{11})_c + (\theta^y_{11})_s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(\theta^x_{11})_x & (\theta^x_{11})_y\\ (\theta^y_{11})_x & (\theta^y_{11})_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\gamma\\ \sin\gamma\end{bmatrix} \quad \text{------------}(11)$$

したがって，最初に与えられた，単位モーメント方向の回転角が次のように得られる。

$$\theta_{11} = \begin{bmatrix}\cos\gamma\\ \sin\gamma\end{bmatrix}^t\begin{bmatrix}\theta^x_{11}\\ \theta^y_{11}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\gamma\\ \sin\gamma\end{bmatrix}^t\begin{bmatrix}(\theta^x_{11})_x & (\theta^x_{11})_y\\ (\theta^y_{11})_x & (\theta^y_{11})_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\gamma\\ \sin\gamma\end{bmatrix} \quad \text{--------}(12)$$

ゆえに，任意方向のばね定数b_{11}が，$b_{11} = -1/\theta_{11}$ -------(13) より決定されることになる。

ばね定数が算定されれば，座屈荷重は図(2)の状態を解析することにより算定される。すなわち，柱の曲げに関する基礎微分方程式 $\frac{d^4y}{dx^4} + k^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$（ただし，$k^2 = P/EI$）---------(13) より，たわみyを求め，境界条件として次のようなものを用いればよい。

柱下端固定； $x=0$で $y=0$，$\frac{dy}{dx}=0$　　$x=l$で $y=0$，$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b_{11}}{EI}\frac{dy}{dx}$

柱下端ヒンジ；$x=0$ で $y=0$，$\frac{d^2y}{dx^2}=0$　　$x=l$ で $y=0$，$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{k_{11}}{EI}\frac{dy}{dx}$

よって，本題の固有値方程式が次のように得られる。

$$k_{11}\cdot l/EI=\{kl\sin kl-(kl)^2\cos kl\}/\{2(1-\cos kl)-kl\sin kl\}\quad (\text{固定})---(14)$$

$$k_{11}\cdot l/EI=(kl)^2\sin kl/\{kl\cos kl-\sin kl\}\quad (\text{ヒンジ})---(15)$$

無梁板構造の座屈荷重の算定において，ばね定数としての板の曲げ抵抗と柱の曲げ剛性の大小により，柱の曲げ変形の方向が定められなければならないが，これを理論的に求めることは，甚だ困難である。しかし，任意方向のばね定数は，式(13)より比較的容易に求めることができ，また，柱の固有値もばね定数が求められれば，式(14)，(15)より簡単に計算できるから，実際演算上は座屈方向として，適当に種々の方向を想定し，それらに対する座屈荷重を算定のうえ，その最小値を数値的に求めれば，座屈方向ならびに座屈荷重を決定することが可能となる。

3．数値計算例

図(4)に示すように，矩形板が中間柱の他に周辺で単純支持されるものとし，板厚を $a/100$，また，柱断面を $a/24\times a/24$ とする。しかるとき，辺長比 μ を 1.0，1.5，2.0，柱長さを 1.0a，1.5a，柱位置 (ξ_1,η_1) を (1/6，1/6)，(1/6，1/3)，(1/6，1/2)，(1/3，1/6)，(1/3，1/3)，(1/3，1/2)，(1/2，1/6)，(1/2，1/3)，(1/2，1/2) のごとく種々変化させたときの，板のばね定数および座屈荷重を求めれば，図(5)～(11)のごとくである。

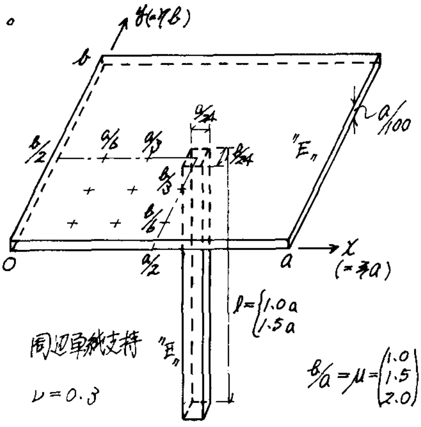

図4.

μ=1.5のときの座屈方向

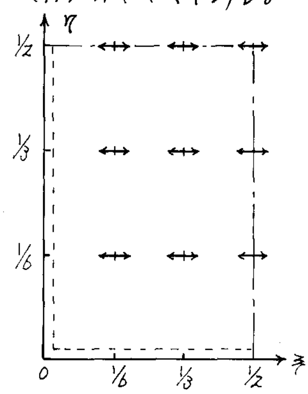

図5.

μ=1.0のときの座屈方向

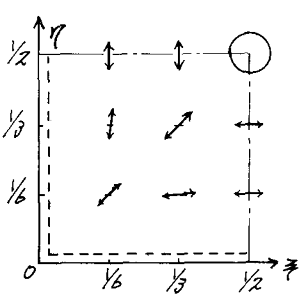

図6.

一断面における，座屈荷重，ばね定数，曲げ剛性の関係。

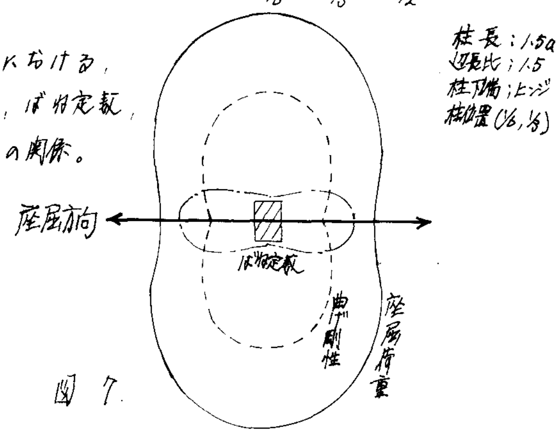

図7.

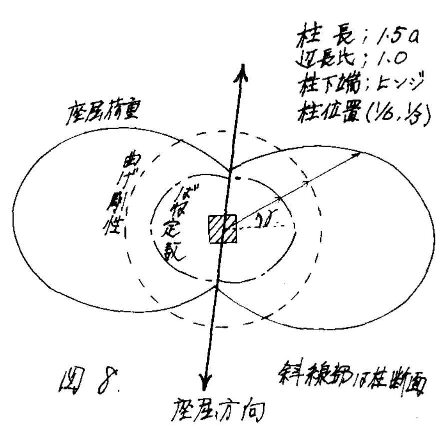

図8.

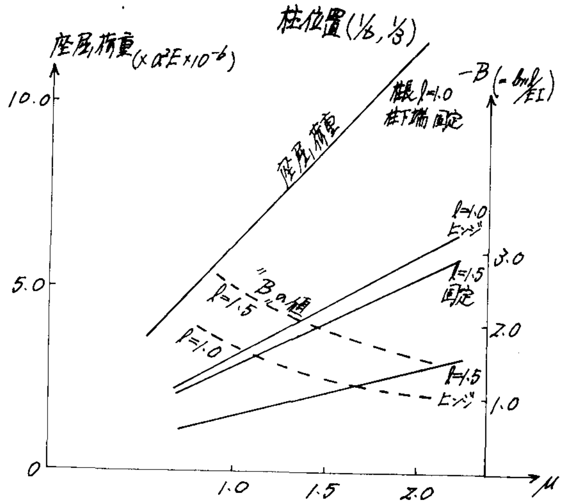

図 9

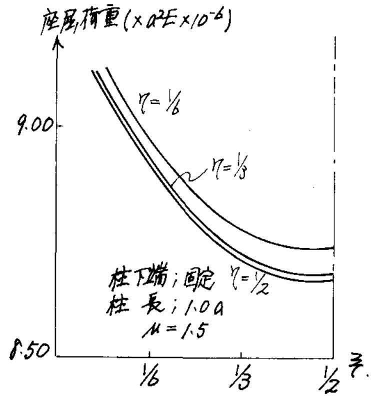

図 10

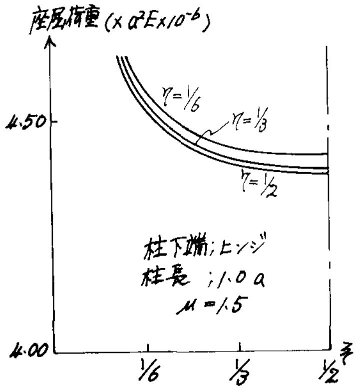

図 11

これらの図より次の諸事項が明らかとなる。

(1) 無梁板構造において，板の形状及び厚さを一定として，単に柱の部材長を大にすれば，これにともなって板のばね定数が大となり，したがって，座屈固有値が大きくなる。しかし座屈荷重で判断すれば，当然ながら減少することになる。

(2) 板の面内における柱位置が，固有値及び座屈荷重に与える影響を検討するとき，次のようになる。すなわち，板中央点に柱があるときには，板の曲げ抵抗，したがって，ばね定数が小さくなり，これに伴って固有値も小さくなる。一方，柱が板の周辺に近づくとき，座屈荷重が急激に大きくなる。

(3) 辺長比が小さくなれば，板の曲げ抵抗が大きくなるが，本算例では，柱断面も辺長比と同じ比率で変化させたので，座屈荷重は減少した。

(4) 座屈方向は板の曲げ抵抗と，柱の曲げ剛性により決定される。正方形板を正方形断面の柱で支える場合には，板の曲げ抵抗のみにより座屈方向が決定される。一方，長方形板を同じ辺長比を有する長方形断面の柱で支える場合には，板の曲げ抵抗よりも，柱の曲げ剛性の影響の方が大きく，これにより，座屈方向が決定される。

参考文献

(1) 樗木 武 ; 無梁板構造の解法に関する研究（学位論文 1970）

(2) T. Chiyaki ; One-Way Buckling of Flat Slabs Supported by Flexural Columns Proc. of the 19th Japan Nat. for Applied Mechanics 1969 12.

(3) Timoshenko ; Theory of Elastic Stability

(4) 長柱研究委員会 ; 弾性安定要覧