# I-79　ラーメン隅角部の腹板の座屈値について

北海道大学　正員　渡辺　昇
北海道大学　学生員　○川上　洵
北海道大学　学生員　堺　孝司

## 1、まえがき

本研究は、図.1、a のような ラーメン隅角部の腹板の座屈値を出し、設計計算式を、求めたものである。解析の方法は、ラーメン隅角部の腹板を面内荷重をうける扇形平板と見做し、シャイベとしての応力分布を求める。次に、扇形平板の座屈曲面を仮定しておき、Ritz の方法により、座屈値を求めた。

## 2. 荷重と応力分布

図.2.a のような、扇形のシャイベに外力 $M, N, Q$ が作用するときその応力分布を Airy の応力関数より知る。軸対称の $M$ が作用するとき、図 2.b となる。

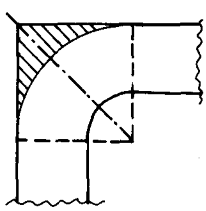

図.1.a

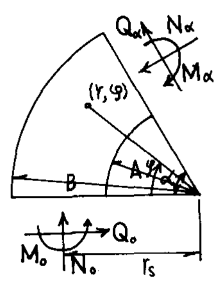


図.2.a

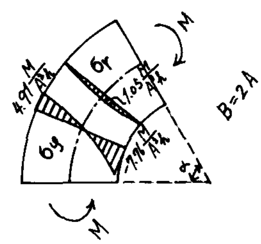


図.2.b

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_\varphi &= \frac{M_0}{B^2 h}\left\{\left[-\frac{C_{11}}{\left(\frac{r}{B}\right)^2}+(2C_{31}-C_{11})+2C_{31}\log\frac{r}{B}\right]+\left[\frac{C_{32}}{\left(\frac{r}{B}\right)}+\frac{2C_{12}}{\left(\frac{r}{B}\right)^3}+6C_{22}\left(\frac{r}{B}\right)\right]\sin\varphi+\left[\frac{C_{33}}{\left(\frac{r}{B}\right)}+\frac{2C_{13}}{\left(\frac{r}{B}\right)^3}+6C_{23}\left(\frac{r}{B}\right)\right]\cos\varphi\right\} \\
\tau_{r\varphi} &= \frac{M_0}{B^2 h}\left\{-\left[\frac{C_{32}}{\left(\frac{r}{B}\right)}-\frac{2C_{12}}{\left(\frac{r}{B}\right)^3}+2C_{22}\left(\frac{r}{B}\right)\right]\cos\varphi+\left[\frac{C_{33}}{\left(\frac{r}{B}\right)}-\frac{2C_{13}}{\left(\frac{r}{B}\right)^3}+2C_{23}\left(\frac{r}{B}\right)\right]\sin\varphi\right\} \\
\sigma_r &= \frac{M_0}{B^2 h}\left\{\left[\frac{C_{11}}{\left(\frac{r}{B}\right)^2}-C_{11}+2C_{31}\log\frac{r}{B}\right]+\left[\frac{C_{32}}{\left(\frac{r}{B}\right)}-\frac{2C_{12}}{\left(\frac{r}{B}\right)^3}+2C_{22}\left(\frac{r}{B}\right)\right]\sin\varphi+\left[\frac{C_{33}}{\left(\frac{r}{B}\right)}-\frac{2C_{13}}{\left(\frac{r}{B}\right)^3}+2C_{23}\frac{r}{B}\right]\cos\varphi\right\}
\end{aligned}
\right\} \quad (1)
$$

式(1)において 係数 $C_{ij}$ は、次式で表わされる。

$$
\left.
\begin{aligned}
&C_{11}=\frac{d^2\left\{4\times\log d\cdot\left(1+\xi\frac{r_s}{B}\right)\right\}}{\left[4d^2\cdot(\log d)^2-(1-d^2)^2\right]}, \quad C_{21}=\frac{C_{11}(1-d^2-2d^2\log d)}{4d^2\log d}, \quad C_{31}=\frac{\left\{-\left(\frac{1}{d^2}-1\right)C_{11}\right\}}{2\log d} \\
&C_{12}=\frac{d^2\psi}{2\left[(1+d^2)\log d+(1-d^2)\right]}, \quad C_{22}=-\frac{C_{12}}{d^2}, \quad C_{32}=2\left(1+\frac{1}{d^2}\right)C_{12} \\
&C_{13}=-\frac{d^2\xi}{2\left[(1+d^2)\cdot\log d+(1-d^2)\right]}, \quad C_{23}=-\frac{C_{13}}{d^2}, \quad C_{33}=2\left(1+\frac{1}{d^2}\right)C_{13}
\end{aligned}
\right\} \quad (2)
$$

こゝで

$d=\frac{A}{B}$ ，　$N_0=\xi\frac{M_0}{B}$ ，　$Q_0=\psi\frac{M_0}{B}$ ，　$h$；板厚である。

## 3. Ritz の方法による座屈値

周辺単純支持の扇形平板の座屈曲面を次式で仮定する。

$$w(r,\varphi)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}A_{mn}\sin\frac{m\pi\varphi}{\alpha}\sin\frac{n\pi\log\frac{r}{B}}{\log\alpha}. \qquad \text{---------}(3)$$

式(3)は周辺条件を満足する。

扇形平板のポテンシャル・エネルギーは

$$\Delta=\frac{h}{2}\int_A^B\int_0^\alpha\left\{\left[\sigma_r\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\sigma_\varphi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)^2+2\tau_{r\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)\right]\right.$$
$$\left.+K\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right)^2-2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right]-\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\varphi}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right]^2\right)\right]\right\}r\,d\varphi\,dr \qquad (4)$$

こゝで　$K=\dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$　；板剛性

式(4)を簡単に書くと

$$\Delta=\int_A^B\int_0^\alpha F(\varphi,r,w',\dot{w},w'',\ddot{w},w'')\,d\varphi\,dr \qquad \text{--------}(5)$$

但し　$w'=\dfrac{\partial}{\partial r}w$　,　$\dot{w}=\dfrac{\partial}{\partial\varphi}w$　である。

ポテンシャルエネルギーを最小とする係数行列式を求めると

$$\frac{\partial\Delta}{\partial A_{mn}}=\int_A^B\int_0^\alpha\frac{\partial F}{\partial A_{mn}}\,d\varphi\,dr=0 \qquad \text{------}(6)$$

即ち、

$$\sum_q A_{mq}R_{mnmq}-k_M\left\{A_{mn}B^{(1)}_{mnmn}-\sum_q A_{mq}B^{(2)}_{mnmq}+\sum_{\substack{q\\(n+q=\text{奇数})}}A_{mq}B^{(3)}_{mnmq}+\sum_p\sum_q A_{pq}B^{(4)}_{mnpq}\right\}=0 \qquad (7)$$

こゝで

$$R_{mnmq}=\alpha\frac{nq\left(\frac{\pi}{\ell d}\right)^2\left[1-(-1)^{n+q}\cdot d^{-2}\right]}{\left(4+\frac{(n-q)^2\pi^2}{\ell d^2}\right)\cdot\left(4+\frac{(n+q)^2\pi^2}{\ell d^2}\right)}\times\left\{4\left[\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{\ell d}\right)^2\right]\left[\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{q\pi}{\ell d}\right)^2\right]+\right.$$
$$\left.+(1-\mu)\left[(n^2-q^2)^2\left(\frac{\pi}{\ell d}\right)^4+8(n^2+q^2)\left(\frac{\pi}{\ell d}\right)^2+16\right]\right\} \qquad (8)$$

$$B^{(1)}_{mnmn}=-\frac{\ell d}{2}\alpha\left\{\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2\left[2C_{31}\left(1+\frac{\ell d}{2}\right)-C_{11}\right]+\left(\frac{n\pi}{\ell d}\right)^2\left[C_{31}\cdot\ell d-C_{11}\right]\right. \qquad (9)$$

$$B^{(2)}_{mnmq}=\alpha\cdot C_{11}\left[1-(-1)^{n+q}\cdot d^{-2}\right]\times\left\{\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2\left(\frac{1}{4+\frac{(n-q)^2\pi^2}{\ell d^2}}-\frac{1}{4+\frac{(n+q)^2\pi^2}{\ell d^2}}\right)-\right.$$
$$\left.-nq\left(\frac{\pi}{\ell d}\right)^2\left(\frac{1}{4+\frac{(n-q)^2\pi^2}{\ell d^2}}+\frac{1}{4+\frac{(n+q)^2\pi^2}{\ell d^2}}\right)\right\} \qquad (10)$$

$$B^{(3)}_{mnmq}=2\alpha C_{31}\left\{\left(\frac{m\pi}{\alpha}\right)^2\left(\frac{1}{\frac{(n-q)^2\pi^2}{\ell d^2}}-\frac{1}{\frac{(n+q)^2\pi^2}{\ell d^2}}\right)+nq\left(\frac{\pi}{\ell d}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\frac{(n-q)^2\pi^2}{\ell d^2}}+\frac{1}{\frac{(n+q)^2\pi^2}{\ell d^2}}\right)\right\} \qquad (11)$$

$$B^{(4)}_{mnpq}=\frac{1}{2}\left\{C_{32}\left[1-(-1)^{m+p}\cdot\cos\alpha\right]+C_{33}(-1)^{m+p}\cdot\sin\alpha\right\}\left[1-d^{-1}\cdot(-1)^{n+q}\right]\times$$

$$
\begin{aligned}
\times & \left\{ \begin{array}{l}
(P_{mp}+Q_{mp})\, mp \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 (F_{nq}-H_{nq}) + (P_{mp}-Q_{mp})\, nq \left(\frac{\pi}{\rho_d}\right)^2 (F_{nq}+H_{nq}) - \\
-\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\pi}{\rho_d}\right)^2 \left\{ \begin{array}{l} mq\left[(m-p)P_{mp}-(m+p)Q_{mp}\right]\cdot\left[(n-q)F_{nq}+(n+q)H_{nq}\right] + \\ + np\left[(m-p)P_{mp}+(m+p)Q_{mp}\right]\cdot\left[(n-q)F_{nq}-(n+q)H_{nq}\right] \end{array} \right\}
\end{array} \right\} \\
& + \left\{ C_{12}\left[1-(-1)^{m+p}\cdot\cos\alpha\right] + C_{13}(-1)^{m+p}\cdot\cos\alpha \right\} \left[1-(-1)^{n+q} d^{-3}\right] \times \\
\times & \left\{ \begin{array}{l}
3(P_{mp}+Q_{mp})\, mp \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 \left( \frac{1}{9+\frac{(n-q)^2\pi^2}{\rho_d^2}} - \frac{1}{9+\frac{(n+q)^2\pi^2}{\rho_d^2}} \right) - \\
-3(P_{mp}-Q_{mp})\, nq \left(\frac{\pi}{\rho_d}\right)^2 \left( \frac{1}{9+\frac{(n-q)^2\pi^2}{\rho_d^2}} + \frac{1}{9+\frac{(n+q)^2\pi^2}{\rho_d^2}} \right) + \\
+\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\pi}{\rho_d}\right)^2 \left[ mq\left[(m-p)P_{mp}-(m+p)Q_{mp}\right] \left( \frac{(n+q)}{9+\frac{(n+q)^2\pi^2}{\rho_d^2}} - \frac{(n-q)}{9+\frac{(n-q)^2\pi^2}{\rho_d^2}} \right) \right. \\
\qquad \left. -nq\left[(m-p)P_{mp}+(m+p)Q_{mp}\right] \left( \frac{(n+q)}{9+\frac{(n+q)^2\pi^2}{\rho_d^2}} - \frac{(n-q)}{9+\frac{(n-q)^2\pi^2}{\rho_d^2}} \right) \right]
\end{array} \right\} \\
& + \left\{ C_{22}\left[1-(-1)^{m+q}\cos\alpha\right] + C_{23}(-1)^{m+p}\sin\alpha \right\}\cdot\left[1-(-1)^{n+q}\cdot d\right] \times \\
\times & \left\{ \begin{array}{l}
-3(P_{mp}+Q_{mp})\, mp \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 (F_{nq}-H_{nq}) - (P_{mp}-Q_{mp})\, nq \left(\frac{\pi}{\rho_d}\right)^2 (F_{nq}+H_{nq}) - \\
-\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\pi}{\rho_d}\right)^2 \left\{ \begin{array}{l} mq\left[(m-p)P_{mp}-(m+p)Q_{mp}\right]\cdot\left[(n+q)\cdot H_{nq}+(n-q)F_{nq}\right] \\ -nq\left[(m-p)P_{mp}+(m+p)Q_{mp}\right]\cdot\left[(n+q)\cdot H_{nq}-(n-q)F_{nq}\right] \end{array} \right.
\end{array} \right\}
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

こゝで $\rho_d = \log d$ 　 $P_{mp} = \frac{1}{(m-p)^2\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2-1}$, $Q_{mp} = \frac{1}{(m+p)^2\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2-1}$

$F_{nq} = \frac{1}{(n-q)^2\left(\frac{\pi}{\rho_d}\right)^2+1}$, $H_{nq} = \frac{1}{(n+q)^2\left(\frac{\pi}{\rho_d}\right)^2+1}$

## 4、数値計算結果

図. 3、a, b は, 曲げモーメントの限界値を $\alpha$ と $d$ を種々かえて求めたものゝ一例である。

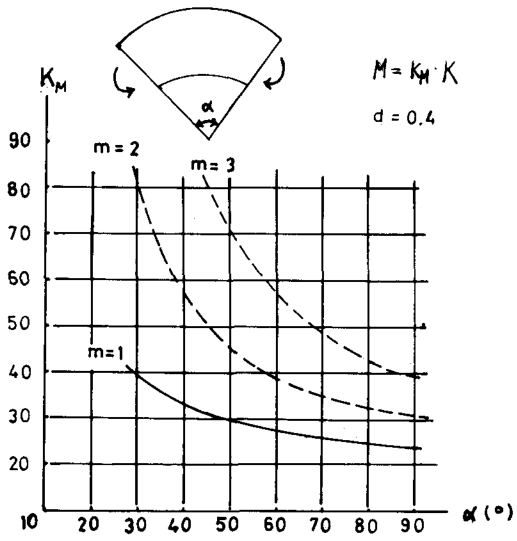


図.3. a

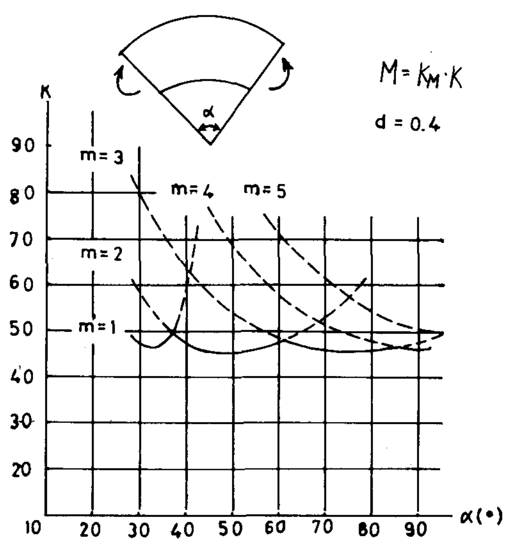


図.3. b

## 5、設計計算式

図.3 の $d=0.2\sim0.9$ 迄の座屈値の最小値を示す次式を筆者らは提案する。

I、図.3 a.

$$k_{min} = f_1(d) + \frac{f_2(d)}{\alpha^2} + f_3(d)\cdot\alpha^2 \qquad (13)$$

こゝで

$$f_1(d) = 28.97\cdot d + 14.40$$

$$f_2(d) = -1172123\,d^3 + 1769526\,d^2 - 939809\,d + 180035 \qquad (d<0.6)$$

$$f_2(d) = 0 \qquad (d\geqq0.6)$$

$$f_3(d) = -0.000476 \qquad (d\leqq0.4)$$

$$f_4(d) = -0.00114\,d - 0.000038 \qquad (d>0.4)$$

II、図.3.b.

$$k_{min} = 43.50 + \frac{0.43}{d^2} - 5.35\,d^2 \qquad \cdots\cdots\cdots (14)$$

式(14)は、図.4のように描かれる。

## 6、数値計算例

図.5のようなラーメン隅角部の曲げモーメントの限界値を求める。

隅角部に補剛桁があり、腹板が単純支持されていると考えると

$d=0.3$

$\alpha=45°$

のとき

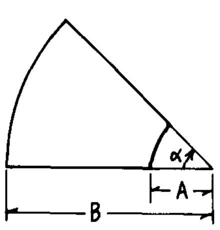


図.5.

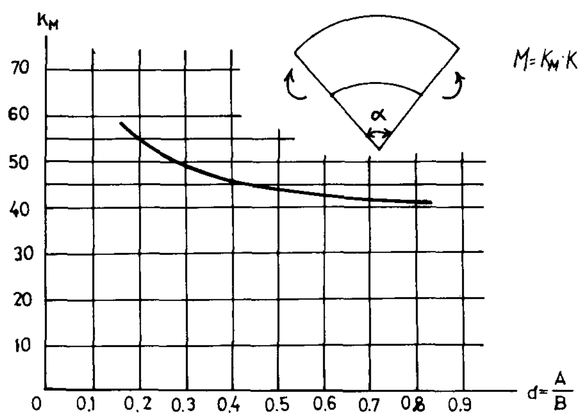


図.4.

式(13)より　　$k_{min} = 34.8$

式(14)より　　$k_{min} = 47.8$

である。

## 参考文献


King-Yuen Chu ; Beuluntersuchung von ebenen Stegblechen kreisförmig gekrümmter Träger mit I-Querschnitt ; Der Stahlbau, 1966. 5.