I-77 3ヒンジアーチの座屈特性について

長崎大学 正員 崎山毅

1. まえがき　3ヒンジアーチの中間ヒンジの意義は、座屈特性の解析にさいして、微小変形問題の場合とはかなり異なったものとなる。中間ヒンジ点におけるたわみ角の不連続性と、それに起因する軸力およびせん断力の不連続性とが、変形状態における中間ヒンジ点の力の平衡条件をアーチの他の部分における平衡条件とは異なったものとするからである。この研究は任意位置に中間ヒンジをもつ円弧アーチの円形等分布荷重に対する、いわゆる座屈曲げを解析しその特性を明らかにするものである。

2. 座屈方程式　$\eta=\varphi$ なる任意点に中間ヒンジをもつ3ヒンジ円弧アーチの座屈は次の連立微分方程式で表わされる。

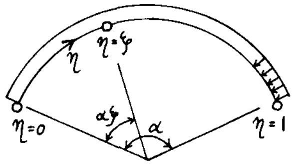

図-1

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{d^4u}{d\eta^4}+k^2\frac{d^2u}{d\eta^2}+\alpha^2a^2u\right)+\alpha\left[\frac{d^3w}{d\eta^3}+(k^2-a^2)\frac{dw}{d\eta}\right]=\frac{pL^3}{EI}\\&\alpha\left(\frac{d^3u}{d\eta^3}-a^2\frac{du}{d\eta}\right)+(\alpha^2+a^2)\frac{d^2w}{d\eta^2}=0\end{aligned}\right\}(\eta\neq\varphi)\quad(1)$$

ただし円弧アーチの法線および接線方向のたわみを $\bar{u}(\eta)$, $\bar{w}(\eta)$ とし、アーチ部材長、断面積、断面2次モーメントをそれぞれ L, A, I とするとき、$u(\eta)=\bar{u}(\eta)/L$, $w(\eta)=\bar{w}(\eta)/L$ である。なお、α：アーチ中心角、$a^2=AL^2/I$, $k^2=pL^3/\alpha EI$ である。

座屈方程式(1)の解は単位階段函数 $\bar{u}(\eta-\varphi)$ を用いて次の形で求められる。$\eta=\varphi$ は中間ヒンジ位置である。

$$u(\eta)=u_1(\eta)+u_2(\eta)\cdot\bar{u}(\eta-\varphi)\quad(2\cdot a)\qquad w(\eta)=w_1(\eta)+w_2(\eta)\cdot\bar{u}(\eta-\varphi)\quad(2\cdot b)$$

たわみ角 $\theta(\eta)$、曲げモーメント $M(\eta)$、軸力 $N(\eta)$、せん断力 $Q(\eta)$ も同様に

$\theta(\eta)=\theta_1(\eta)+\theta_2(\eta)\cdot\bar{u}(\eta-\varphi)$ (2·c), $M(\eta)=M_1(\eta)+M_2(\eta)\cdot\bar{u}(\eta-\varphi)$ (2·d), $N(\eta)=N_1(\eta)+N_2(\eta)\bar{u}(\eta-\varphi)$ (2·e), $Q(\eta)=Q_1(\eta)+Q_2(\eta)\bar{u}(\eta-\varphi)$ (2·f)

境界条件は $u_1(0)=0$ (3·a), $w_1(0)=0$ (3·a), $M_1(0)=0$ (3·c) $u_1(1)+u_2(1)=0$ (3·d), $w_1(1)+w_2(1)=0$ (3·e), $M_1(\eta)+M_2(\eta)=0$ (3·f)

中間ヒンジ点において $u_2(\varphi)=0$ (4·a), $w_2(\varphi)=0$ (4·b), $M_1(\varphi)=0$ (4·c), $M_2(\varphi)=0$ (4·d)

$$N_1(\varphi)[1-\cos\theta_2(\varphi)]+N_2(\varphi)+Q_1(\varphi)\cdot\sin\theta_2(\varphi)=0\quad(4\cdot e),\quad Q_1(\varphi)[1-\cos\theta_2(\varphi)]+Q_2(\varphi)-N_1(\varphi)\cdot\sin\theta_2(\varphi)=0\quad(4\cdot f)$$

3. 座屈方程式の解　座屈方程式(1)の解は(3·a)~(3·c), (4·a)~(4·c)を考慮して

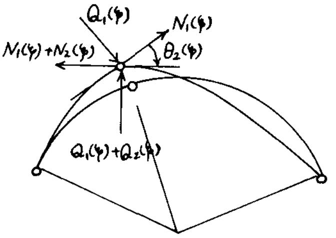

図-2

$$u(\eta)=u_{11}(\eta)\cdot\theta_1(0)+u_{12}(\eta)\cdot N_1(0)+u_{13}(\eta)\cdot Q_1(0)+[\bar{U}_{11}(\eta)\cdot\theta_2(\varphi)+\bar{U}_{12}(\eta)\cdot N_2(\varphi)+\bar{U}_{13}(\eta)\cdot Q_2(\varphi)]\bar{u}(\eta-\varphi)-u_{14}(\eta)\frac{pL^3}{EI}\quad(5\cdot a)$$

$$w(\eta)=w_{11}(\eta)\cdot\theta_1(0)+w_{12}(\eta)\cdot N_1(0)+w_{13}(\eta)\cdot Q_1(0)+[\bar{W}_{11}(\eta)\cdot\theta_2(\varphi)+\bar{W}_{12}(\eta)\cdot N_2(\varphi)+\bar{W}_{13}(\eta)\cdot Q_2(\varphi)]\bar{u}(\eta-\varphi)-w_{14}(\eta)\frac{pL^3}{EI}\quad(5\cdot b)$$

として

$$M(\eta)=m_{12}(\eta)\cdot N_1(0)+m_{13}(\eta)\cdot Q_1(0)+[M_{12}(\eta)\cdot N_2(\varphi)+M_{13}(\eta)\cdot Q_2(\varphi)]\bar{u}(\eta-\varphi)-m_{14}(\eta)\frac{pL^3}{EI}\quad(5\cdot c)$$

$$N(\eta)=n_{12}(\eta)\cdot N_1(0)+n_{13}(\eta)\cdot Q_1(0)+[N_{12}(\eta)\cdot N_2(\varphi)+N_{13}(\eta)\cdot Q_2(\varphi)]\bar{u}(\eta-\varphi)-n_{14}(\eta)\frac{pL^3}{EI}\quad(5\cdot d)$$

$$Q(\eta)=g_{12}(\eta)\cdot N_1(0)+g_{13}(\eta)\cdot Q_1(0)+[Q_{12}(\eta)\cdot N_2(\varphi)+Q_{13}(\eta)\cdot Q_2(\varphi)]\bar{u}(\eta-\varphi)-g_{14}(\eta)\frac{pL^3}{EI}\quad(5\cdot e)$$

境界条件(3·d)~(3·f)と(4·c)とより $\theta_1(0)$, $N_1(0)$, $Q_1(0)$, $Q_2(\varphi)$ を定めれば

$\theta_1(0)=[a_0+a_1\cdot\theta_2(\varphi)+a_2\cdot N_2(\varphi)]/D$ (6·a), $N_1(0)=[b_0+b_1\cdot\theta_2(\varphi)+b_2\cdot N_2(\varphi)]/D$ (6·b), $Q_1(0)=[c_0+c_1\theta_2(\varphi)+c_2\cdot N_2(\varphi)]/D$ (6·c)

$Q_2(\varphi)=[d_0+d_1\cdot\theta_2(\varphi)+d_2\cdot N_2(\varphi)]/D$ (6·d),

$$D=\sin\frac{\alpha}{2}\Big\{2\beta^3(\alpha^2+a^2-k^2)\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta\varphi}{2}\cos\frac{\beta(1-\varphi)}{2}-2\alpha\beta^2(\alpha^2+a^2)\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha\varphi}{2}\sin\frac{\alpha(1-\varphi)}{2}$$
$$-2\alpha^3(\beta^2+a^2)\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}-\alpha\beta a^2k^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta\varphi}{2}\cos\frac{\beta(1-\varphi)}{2}\Big\}\quad(6\cdot e)$$

ただし $\beta^2=\alpha^2+k^2$

また、条件式(4·e), (4·f)より $\theta_2(\varphi)$ および $N_2(\varphi)$ を与える次式がえられる。

$$D\cdot[d_0+d_1\cdot\theta_2(\varphi)]-[g_0+g_1\cdot\theta_2(\varphi)]\sin\theta_2(\varphi)-[h_0+h_1\cdot\theta_2(\varphi)]\cdot[1-\cos\theta_2(\varphi)]=0\quad(7\cdot a)$$

$$N_2(\varphi)=\{[c_0+c_1\cdot\theta_2(\varphi)]\sin\theta_2(\varphi)-[b_0+b_1\cdot\theta_2(\varphi)][1-\cos\theta_2(\varphi)]\}/\{D-c_2\sin\theta_2(\varphi)+b_2[1-\cos\theta_2(\varphi)]\}\quad(7\cdot b)$$

4. 解析結果　3ヒンジ円弧アーチに生じる変形の大きさは中間ヒンジ点の相対たわみ角 $\theta_2(\xi)$ によって端的に知ることができる。変形と荷重とは比例せず、$\theta_2(\xi)$ は荷重の増加にともなって比例以上に増大し、座屈荷重で無限大となる。したがって、$\theta_2(\xi)$ と荷重との関係から座屈荷重を知ることができる。また式(6)から明らかなように $D\to 0$ のとき $\theta_1(0), N_1(0), Q_1(0), Q_2(\xi)\to\infty$ となり、このときも3ヒンジアーチに大変形が生じる。したがって　$D=0$　もまた座屈条件式である。

図-3(a),(b)は細長比 $a=100$, 中心角 $\alpha=60°$ の3ヒンジアーチの相対たわみ角 $\theta_2(\xi)$ と無次元荷重 $k=(pL^3/\alpha EI)^{\frac{1}{2}}$ との関係を示す。(a),(b)はそれぞれ中間ヒンジ位置 $\xi=0.5, 0.4$ に対応する。これによれば、$\theta_2(\xi)$ と荷重 k とは比例せず、ある k 値に対して $\theta_2(\xi)$ は不連続となり、不連続点の前後で $\pm\infty$ となる。このときの k が座屈荷重を与える。(a)図の直線IIIと横軸との交点の k は座屈条件式 $D=0$ の根である。図-4(a)は中間ヒンジ位置 $\xi=0.5$ なる対称型3ヒンジアーチの $|\theta_2(\xi)|=0.1$ に対する法線方向たわみ形を表わす。$k=4.5$[I]のたわみは負の曲げモーメントによる上に凸の変形、$k=6.0$[II]のたわみは正の曲げモーメントによる下に凸の変形を表わす。$k=6.2$[III]のたわみは中間ヒンジをはさんで互に逆の曲げモーメントの生じる逆対称の変形をあらわす。

図-4(b)は $\xi=0.4$ なる非対称構造をもつ3ヒンジアーチについて、荷重の変化に対するたわみ形状の変化の様子を示す。不連続点の前後でたわみ形状が全く異なることを知る。このことが座屈モードの相違につながる。

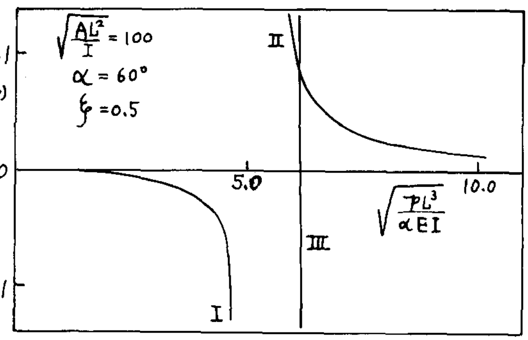

図-3(a)

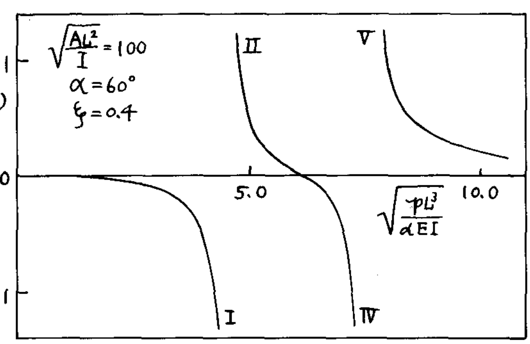

図-3(b)

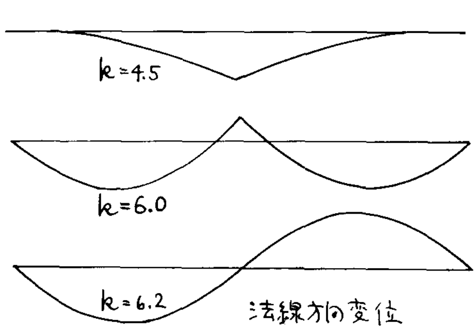

図-4(a)

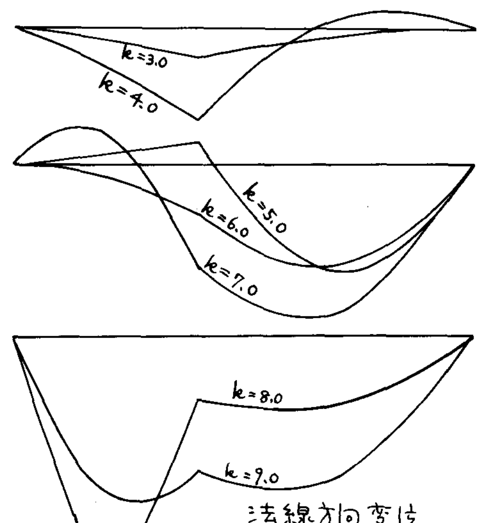

図-4(b)

(参考文献) 弾性安定要覧, 長柱研究委員会, コロナ社, 昭42年