

徳島大学工学部 正員 ○ 児嶋 弘 行
 徳島大学工学部 正員 平尾 潔
 川崎重工 KK 正員 佐伯 尚

まえがき

骨組によって構成されたネットワークのモブトポロジ的な性質と利用した骨組構造の線形解析法は、S.J.Fenves¹⁾や W.R.Spillers²⁾らによって確立されて以来広く利用されており、とくに、Tree Method は A.S.Householder の式を用いることにより、逆行列が能率的に計算でき、有効な解析法である。この報告は、部枝の個有座標系に対する基本式の誘導の際に曲げに及ぼす軸力の影響を考慮した非線形 Stiffness Matrix を用いて、平面剛節骨組と Tree (もしくは、これに類する構造部分) と Link とに分割した場合の一弾性安定解析法について述べたものである。

基準座標系に対する骨組全体の Stiffness Matrix の作成は文献 2) の方法にしたがったが、このような非線形解析においては文献 2) で線形解析に対して定義された Modified Incidence Matrix はそのままの形で用いることができないため、ここでは、これを更に修正した非線形 Modified Incidence Matrix を定義して用いた。また、座屈荷重の決定は荷重強度と漸増して、骨組全体に対する釣合方程式の係数行列の行列式の値が 0 となる強度を見出す方法によったが、上述のように骨組を分割して解析する場合 Stiffness Matrix は $Z=Y+V \cdot X \cdot W$ の形で表わされ、この行列式の値の計算には式 $|Z|=|Y| \cdot |X|^{-1} + W \cdot Y^{-1} \cdot V| \cdot |X|$ を誘導して用いて計算の能率化をはかった。

1. Stiffness Matrix と Flexibility Matrix

骨組中の任意の一部枝 (有向枝) i の始端を I 終端を F として、部枝軸と個有座標系 I - F との z 軸とを一致させた場合の材端力 S_i と材端変形量 δ_i との関係は式 (1) のように、また、I 端と F 端との材端力の間の関係は式 (2) のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} I S_i &= I I K_i \cdot I \delta_i + I F K_i \cdot F \delta_i \\ F S_i &= F I K_i \cdot I \delta_i + F F K_i \cdot F \delta_i \end{aligned} \right\} \text{--- (1)}$$

$$F S_i = s T_i \cdot I S_i \text{--- (2)}$$

一方、 $I I K_i$ と $I F K_i$ との関係は、

$$I F K_i = I I K_i \cdot \kappa T_i \text{--- (3)}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} I S_i &= I I K_i (I \delta_i + \kappa T_i \cdot F \delta_i) \\ &= I I K_i \cdot \Delta_i \end{aligned} \text{--- (4)}$$

ただし、

$$F S_i = \begin{Bmatrix} N \\ Q \\ M \end{Bmatrix}_i, \quad I \delta_i = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta \end{Bmatrix}_i,$$

$$I I K_i = \begin{Bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} \varphi_5 & \frac{6EI}{l^2} \varphi_2 \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} \varphi_2 & \frac{4EI}{l} \varphi_3 \end{Bmatrix}_i, \quad I F K_i = \begin{Bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} \varphi_5 & \frac{6EI}{l^2} \varphi_2 \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} \varphi_2 & \frac{2EI}{l} \varphi_4 \end{Bmatrix}_i,$$

$$F I K_i = \begin{Bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} \varphi_5 & -\frac{6EI}{l^2} \varphi_2 \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} \varphi_2 & \frac{2EI}{l} \varphi_4 \end{Bmatrix}_i, \quad F F K_i = \begin{Bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} \varphi_5 & -\frac{6EI}{l^2} \varphi_2 \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} \varphi_2 & \frac{4EI}{l} \varphi_3 \end{Bmatrix}_i,$$

$$\Delta_i = I \delta_i + \kappa T_i \cdot F \delta_i$$

と表わすことができる。

一方、式-(1)の第2式に式-(4)の関係を用いると、

$$sT_i^{-1} F S_i = sT_i^{-1} (F_I K_i \cdot \delta_i + F_F K_i \cdot f \delta_i) \\ = {}_{II} K_i \cdot \delta_i + {}_{IF} K_i \cdot f \delta_i = {}_{II} K_i \cdot \Delta_i \quad \text{--- (5)}$$

が成立するから、部材*i*の代表的な Stiffness Matrix として ${}_{II} K_i$ を用いてよいことがわかり、したがって、 ${}_I S_i = S_i$, ${}_{II} K_i = K_i$ と書き直せば、式-(1)の2個の式を式-(6)のように1個の式で表わすことができる。

$$S_i = K_i \cdot \Delta_i \quad \text{--- (6)}$$

式-(6)と Δ_i について解けば Flexibility Matrix F_i が式-(7)のように求まる。

2. Rotation Matrix

基準座標系 $O-xy$ と個有座標系 $[1-2]$ との間の幾何学的関係は、式-(8)の Rotation Matrix R_i によって表わされる。

3. 非線形 Modified Incidence Matrix

剛節骨組においては任意の節点*J*に集まる部材の節点側の変形量は、剛節条件よりすべて*J*の節点変位 U_J で代表させて表わすことができる。いま、Datum Node を除く全節点の変位を U 、全部材の枝端変形量を Δ 、枝端力を S とし、節点に作用する荷重系を P で表わせばこれらの間の関係は非線形 Modified Incidence Matrix kQ , sQ を用いて式-(9)のように表わせる。

$$\Delta = kQ \cdot U, \quad P = sQ \cdot S \quad \text{--- (9)}$$

ここに、 kQ , sQ は部材と節点との連結関係より、右のような内容をもっている。

4. 釣合方程式と分割法による解法

式-(6)は、骨組全体に対する Stiffness Matrix IK を用いれば、式-(10)のように表わすことができる。

$$sT_i = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ (\delta - f) & l & -1 \end{pmatrix}_i, \quad kT_i = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{f}{l} & \frac{f}{l} \end{pmatrix}_i$$

$$\varphi_1 = \frac{\lambda l \sin \lambda l}{2(1 - \cos \lambda l)} \quad (rN > 0) = -\frac{\lambda l \sinh \lambda l}{2(1 - \cosh \lambda l)} \quad (rN < 0)$$

$$\varphi_2 = \frac{\lambda^2 l^2}{6} \left\{ \frac{1 - \cos \lambda l}{2(1 - \cos \lambda l) - \lambda l \sin \lambda l} \right\} \quad (rN > 0)$$

$$= -\frac{\lambda^2 l^2}{6} \left\{ \frac{1 - \cosh \lambda l}{2(1 - \cosh \lambda l) + \lambda l \sinh \lambda l} \right\} \quad (rN < 0)$$

$$\varphi_3 = (3\varphi_2 + \varphi_1)/4, \quad \varphi_4 = (3\varphi_2 - \varphi_1)/2,$$

$$\varphi_5 = \varphi_1 \cdot \varphi_2, \quad \varphi_6 = 2\varphi_1 \varphi_4 - 3\varphi_2,$$

$$\varphi_7 = 4\varphi_1 \cdot \varphi_3 - 3\varphi_2, \quad \lambda^2 = |rN| / EI,$$

$$F_i = \begin{pmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varphi_3 l^3}{3EI \varphi_2 \varphi_7} & -\frac{l^2}{2EI \varphi_7} \\ 0 & -\frac{l^2}{2EI \varphi_7} & \frac{\varphi_1 l}{EI \varphi_7} \end{pmatrix}_i \quad \text{--- (7)}$$

$$R_i = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_i$$

$$\sin \alpha = \{ (fY - lY) + (fV - lV) \} / l,$$

$$\cos \alpha = \{ (fX - lX) + (fU - lU) \} / l,$$

$$l = \left[\{ (fX - lX) + (fU - lU) \}^2 + \{ (fY - lY) + (fV - lV) \}^2 \right]^{1/2},$$

$$U = \{ U_1, U_2, U_3, \dots, U_J, \dots \}^T,$$

$$\Delta = \{ \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_i, \dots \}^T,$$

$$S = \{ S_1, S_2, S_3, \dots, S_i, \dots \}^T,$$

$$P = \{ P_1, P_2, P_3, \dots, P_J, \dots \}^T,$$

$$U_J = \{ u, v, \theta \}^T, \quad P_J = \{ P_x, P_y, M \}^T.$$

$$kQ_{iJ} = \begin{cases} R_i & \text{部材 } i \text{ が節点 } J \text{ に正連結} \\ kT_i^T R_i & \text{ " " 負連結} \\ 0 & \text{ " " 非連結} \end{cases}$$

$$sQ_{iJ} = \begin{cases} R_i^T & \text{部材 } i \text{ が節点 } J \text{ に正連結} \\ R_i^T sT_i & \text{ " " 負連結} \\ 0 & \text{ " " 非連結} \end{cases}$$

$$S = K \cdot \Delta \quad \text{--- (10)}$$

式-(10)に式-(9)の関係を用いれば、節点における力の釣合方程式として式-(11)が得られる。

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & & & & \\ & K_2 & & & \\ & & K_3 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & K_i & \\ & & & & & \dots & \end{bmatrix}$$

$$(sQ \cdot K \cdot kQ)U = P \quad \text{--- (11)}$$

式-(11)をUについて解けば、 $U = (sQ \cdot K \cdot kQ)^{-1} \cdot P$ として与えられた荷重に対する解を得るが、これの収束解を得るにはかなりの繰返し計算を必要とする。そこで、繰返しの各段階における逆行列(式-(11)を連立一次方程式として解く場合と計算時間的欠差がない)の計算を能率的に行うため以下のように骨組を分割して解析する。

a) Tree Methode による場合

骨組をTreeとLinkとに分割し、Treeの部分には添字T, Linkの部分には添字Lをつけて表わすことにすれば、

$$sQ \cdot K \cdot kQ = \begin{bmatrix} sQ_T & sQ_L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_T \\ K_L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} kQ_T \\ kQ_L \end{bmatrix} = sQ_T \cdot K_T \cdot kQ_T + sQ_L \cdot K_L \cdot kQ_L \quad \text{--- (12)}$$

となり、これの逆行列の計算はHouseholderの式を用いることにより、

$$\left. \begin{aligned} (sQ \cdot K \cdot kQ)^{-1} &= G - G \cdot sQ_L (kQ_L \cdot G \cdot sQ_L + F_L)^{-1} kQ_L \cdot G \\ G &= (sQ_T \cdot K_T \cdot kQ_T)^{-1} = kQ_T^{-1} \cdot F_T \cdot sQ_T^{-1} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (13)}$$

として計算される。

b) 骨組を系-A, 系-BとLinkとに分割した場合

系-A, BおよびLinkの諸量にそれぞれA, BおよびLの添字をつけて表わすことにすれば、

$$sQ \cdot K \cdot kQ = \begin{bmatrix} sQ_A & 0 & sC_A \\ 0 & sQ_B & sC_B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_A \\ K_B \\ K_L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} kQ_A & 0 \\ 0 & kQ_B \\ kC_A & kC_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sQ_A \cdot K_A \cdot kQ_A & 0 \\ 0 & sQ_B \cdot K_B \cdot kQ_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} sC_A \\ sC_B \end{bmatrix} \cdot K_L \cdot \begin{bmatrix} kC_A & kC_B \end{bmatrix} \quad \text{--- (14)}$$

となるから、これの逆行列はa)の場合と同様にして、

$$\left. \begin{aligned} (sQ \cdot K \cdot kQ)^{-1} &= \begin{bmatrix} G_A \\ G_B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_A \\ G_B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} sC_A \\ sC_B \end{bmatrix} \cdot \{ kC_A \cdot G_A \cdot sC_A + kC_B \cdot G_B \cdot sC_B + F_L \}^{-1} \cdot \\ &\quad \times \begin{bmatrix} kC_A & kC_B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_A \\ G_B \end{bmatrix} \\ G_A &= (sQ_A \cdot K_A \cdot kQ_A)^{-1} = kQ_A^{-1} \cdot F_A \cdot sQ_A^{-1}, \quad G_B = (sQ_B \cdot K_B \cdot kQ_B)^{-1} = kQ_B^{-1} \cdot F_B \cdot sQ_B^{-1} \end{aligned} \right\} \quad \text{(15)}$$

として計算される。

5. 分割法における行列式の計算法

前述のように本解析法では座屈荷重と荷重強度増法により、 $|sQ \cdot K \cdot kQ| = 0$ となる荷重強度を見出す方法によって求めている。ここでは、分割法を用いる場合の $|sQ \cdot K \cdot kQ|$ の能率的な計算式を示す。前述の a), b) いずれの分割法による場合にも $(sQ \cdot K \cdot kQ)$ は $Y + V \cdot X \cdot W$ の形に書くことができ、 Y, V, X 、および、 W はそれぞれ $(m \times m), (m \times n), (n \times n)$ 、および、 $(n \times m)$ の行列である。いま、 E_m と $(m \times m)$ 、 E_n と $(n \times n)$ の単位行列として、式-(16)のような行列

$$D_1 = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ W \cdot Y^{-1} & E_n \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} Y & V \\ -W & X^{-1} \end{bmatrix}, \quad D_3 = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ X \cdot W & E_n \end{bmatrix} \quad \text{--- (16)}$$

と考へ、行列積 $D_1 \cdot D_2, D_2 \cdot D_3$ の左の右の両辺の行列式と求め比較することによつて、

$$|Y + V \cdot X \cdot W| = |Y| \cdot |W \cdot Y^{-1} \cdot V + X^{-1}| \cdot |X^{-1}| \quad \text{--- (17)}$$

が成り立つことがわかる。したがつて、a)の分割法による場合には、

$$|sQ \cdot K \cdot kQ| = |G^{-1}| \cdot |kQ_L \cdot G \cdot sQ_L + F_L| \cdot |K_L| \quad \text{--- (18)}$$

として計算でき、また、b)の分割法による場合には、

$$|sQ \cdot K \cdot kQ| = |G_A^{-1}| \cdot |G_B^{-1}| \cdot |kC_A \cdot G_A \cdot sC_A + kC_B \cdot G_B \cdot sC_B + F_L| \cdot |K_L| \quad \text{--- (19)}$$

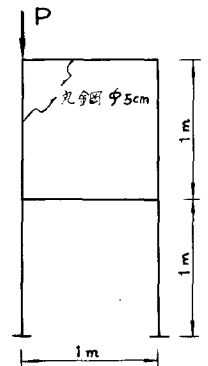
として計算することができるから、式-(13)もしくは(15)の計算と平行して行列式の値を求め得る。

6. 計算例

図のような門形2層ラーメンと京都大学大型計算機 FACOM 230-60 と使用して、Tree Method によつて解析した結果を右表に示す。右の結果は、

P (t)	$ G^{-1} $	$ kQ_L \cdot G \cdot sQ_L + F_L $	$ K_L $	$ sQ \cdot K \cdot kQ $
65.49	0.532×10^{29}	0.224×10^{59}	0.524×10^{-21}	0.624×10^{66}
67.68	0.153×10^{31}	-0.201×10^{61}	-0.234×10^{24}	0.120×10^{66}
68.05	-0.199×10^{33}	0.276×10^{63}	0.269×10^{-27}	-0.148×10^{68}
69.49	-0.500×10^{35}	-0.104×10^{64}	-0.310×10^{-30}	-0.161×10^{66}

分割法によらないで直接式-(11)と解いた場合の結果とよく一致している。また、演算時間は本例のように簡単な骨組では目立つた相違はみられなかったが複雑な骨組では分割法によるのが有利であることが予想される。



とす

故面の都合上電子計算機に対するプログラミングについては割愛した。また、考察、問題点などについても省略したが、これらについては講演会当日報告する。

参考文献

- 1 S.J.Fenves & F.H.Branin "Network-Topological Formulation of Structural Analysis" ST4. Proc. ASCE. 1963 Aug. P.P.483~514
- 2 F.L.DiMaggio & W.R.Spillers "Network Analysis of Structures" EM3. proc. ASCE. 1965 Jun. P.P.169~188.