I-73　　矢板の側方座屈について

室蘭工業大学　正　員　能町純雄
室蘭工業大学　正　員　松岡健一
苫小牧高専　正　員○沢田知之

1. まえがき

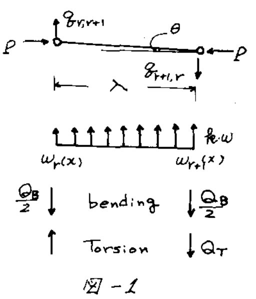
本稿は，矢板の側方座屈について考察したものであるが，矢板はスパン方向にヒンヂ結合され，弾性床上にある場合を考え，各節点の鉛直力と水平力を各要素の鉛直方向変位と軸廻りの回転変位で表わし，節点での力のつり合いを満足するように基本微分差分方程式を誘導する。これに，フーリェ定和分変換及びフーリェ変換を適用し，座屈荷重を求める。

2. 一般式

任意のシートパイルを取り出した図－1より次の基本微分方程式が導かれる。

$$EI\cdot\frac{\overset{IV}{w}_{r+1}(x)+\overset{IV}{w}_r(x)}{2}=Q_B-\frac{w_{r+1}(x)+w_r(x)}{2}\times K \quad \text{①}$$

$$GJ\cdot\frac{\ddot{w}_{r+1}(x)-\ddot{w}_r(x)}{\lambda}=-\lambda\cdot Q_T+\frac{K\cdot\lambda}{12}\{w_{r+1}(x)-w_r(x)\}+P\{w_{r+1}(x)-w_r(x)\} \quad \text{②}$$



図－1

EI：曲げ剛性　　GJ：ねじり剛性

$w_r(x)$：たわみ　　λ：シートパイル幅

k：地盤反力係数　　K：$\lambda\times k$

また，$g_{r+1,r}=\frac{Q_B}{2}+Q_T$ —③　　$g_{r,r+1}=-\frac{Q_B}{2}+Q_T$ —④　なる関係がある故，①②より Q_B, Q_T を③④に代入することにより，$g_{r,r-1}$ 及び $g_{r,r+1}$ を求め節点条件 $g_{r,r-1}-g_{r,r+1}=0$ —⑤ より次の⑥が導かれる。

$$\frac{EI}{4}\{\overset{IV}{w}_{r+1}(x)+2\overset{IV}{w}_r(x)+\overset{IV}{w}_{r-1}(x)\}+\frac{K}{4}\{w_{r+1}(x)+2w_r(x)+w_{r-1}(x)\}+\frac{GJ}{\lambda^2}\{\ddot{w}_{r+1}(x)-2\ddot{w}_r(x)+\ddot{w}_{r-1}(x)\}$$
$$-\frac{K}{12}\{w_{r+1}(x)-2w_r(x)+w_{r-1}(x)\}-\frac{P}{\lambda}\{w_{r+1}(x)-2w_r(x)+w_{r-1}(x)\}=0 \quad \text{⑥}$$

ここで，2次差分式 $\Delta^2\overset{IV}{w}_{r-1}(x)=\overset{IV}{w}_{r+1}(x)-2\overset{IV}{w}_r(x)+\overset{IV}{w}_{r-1}(x)$ とおくと⑥は次の如く示される。

$$\therefore\ \frac{EI}{4}\{\Delta^2\overset{IV}{w}_{r-1}(x)+4\overset{IV}{w}_r(x)\}+\frac{GJ}{\lambda^2}\Delta^2\ddot{w}_{r-1}(x)+\frac{K}{6}\Delta^2 w_{r-1}(x)+Kw_r(x)-\frac{P}{\lambda}\Delta^2 w_{r-1}(x)=0 \quad \text{⑦}$$

よって⑦に fourier－sine 定和分変換を施こし，整理すると⑧の如く表わされる。

$$\therefore\ \frac{EI}{4}\left[-S_i\{(-1)^i\overset{IV}{w}_n(x)-\overset{IV}{w}_0(x)\}-D_i\cdot\overset{IV}{\bar{w}}_i(x)+4\cdot\overset{IV}{\bar{w}}_i(x)\right]+\frac{GJ}{\lambda^2}\left[-S_i\{(-1)^i\ddot{w}_n(x)-\ddot{w}_0(x)\}-D_i\ddot{\bar{w}}_i(x)\right]$$
$$+\frac{K}{6}\left[-S_i\{(-1)^i w_n(x)-w_0(x)\}-D_i\cdot\bar{w}_i(x)+6\bar{w}_i(x)\right]-\frac{P}{\lambda}\left[-S_i\{(-1)^i w_n(x)-w_0(x)\}-D_i\cdot\bar{w}_i(x)\right]=0 \quad \text{⑧}$$

ここで，　$\bar{w}_i(x)=\sum_{r=1}^{n-1}w_r(x)\cdot\sin\frac{i\pi}{n}r$　　$D_i=2\cdot(1-\cos\frac{i\pi}{n})$

$S_i=\sin\frac{i\pi}{n}$

さらに⑧に fourier－sine 変換を行ない整理すると次の様に表わされる。

$$\left\{\frac{EI}{4}D_i\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4-EI\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4-\frac{GJ}{\lambda^2}D_i\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2-\frac{K}{6}(6-D_i)+\frac{P}{\lambda}D_i\right\}\times\widetilde{\overline{\omega_i}}(x)=-\frac{EI}{4}(-1)^iS_i\left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)\left\{\ddot{\omega}_n(l)(-1)^m-\ddot{\omega}_n(0)\right\}\right.$$

$$+\left(\frac{m\pi}{l}\right)^3\left\{\omega_n(l)\cdot(-1)^m-\omega_n(0)\right\}+\left.\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4\cdot\widetilde{\omega}_n(x)\right]+\frac{EI}{4}S_i\left[-\left(\frac{m\pi}{l}\right)\left\{\ddot{\omega}_n(l)\cdot(-1)^m-\ddot{\omega}_n(0)\right\}+\left(\frac{m\pi}{l}\right)^3\left\{\omega_n(l)\cdot(-1)^m-\omega_n(0)\right\}+\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4\cdot\widetilde{\omega}_0(x)\right]$$

$$-\frac{EI}{4}D_i\left[-\left(\frac{m\pi}{l}\right)\left\{\ddot{\overline{\omega}}_i(l)\cdot(-1)^m-\ddot{\overline{\omega_i}}(0)\right\}+\left(\frac{m\pi}{l}\right)^3\left\{\overline{\omega_i}(l)\cdot(-1)^m-\overline{\omega_i}(0)\right\}\right]+EI\cdot\left[-\left(\frac{m\pi}{l}\right)\cdot\left\{\ddot{\overline{\omega_i}}(l)\cdot(-1)^m-\ddot{\overline{\omega_i}}(0)\right\}+\left(\frac{m\pi}{l}\right)^3\left\{\overline{\omega_i}(l)\cdot(-1)^m\right.\right.$$

$$\left.\left.-\overline{\omega_i}(0)\right\}\right]+\frac{GJ}{\lambda^2}(-1)^iS_i\left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)\left\{\omega_n(l)\cdot(-1)^m-\omega_n(0)\right\}+\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\cdot\widetilde{\omega}_n(x)\right]+\frac{GJ}{\lambda^2}\cdot S_i\left[-\left(\frac{m\pi}{l}\right)\left\{\omega_0(l)(-1)^m-\omega_0(0)\right\}-\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\cdot\widetilde{\omega}_0(x)\right]$$

$$-\frac{GJ}{\lambda^2}D_i\left[-\left(\frac{m\pi}{l}\right)\left\{\overline{\omega_i}(l)\cdot(-1)^m-\overline{\omega_i}(0)\right\}\right]-\frac{K}{6}S_i(-1)^i\cdot\widetilde{\omega}_n(x)+\frac{K}{6}\cdot S_i\cdot\widetilde{\omega}_0(x)-\frac{P}{\lambda}S_i\cdot(-1)^i\cdot\widetilde{\omega}_n(x)+\frac{P}{\lambda}\cdot S_i\,\widetilde{\omega}_0(x)- ⑨$$

次に，次式の如くの境界条件式⑩⑪⑫⑬が示される。

自由端では $\ddot{\omega}(0)=0$ —⑩，固定端では $\omega(l)=0$ —⑪，単純支持端は $\ddot{\omega}_n=\ddot{\omega}_0=0$ —⑫，$\omega_n=\omega_0=0$ —⑬

今，スパン方向に相対する両端単純支持，$x=0$ 端自由，$x=l$ 端固定 なる構造物を考えると，⑨は⑩⑪⑫⑬により整理され，fourier－sine 逆変換を施こすことによって⑭で表わし得る。

$$\overline{\omega_i}(x)=\left\{Q(\xi)+\frac{1}{2\alpha\beta}\cdot P(\xi)\right\}\cdot\overline{\omega_i}(0)+\frac{1}{2\alpha\beta}\cdot P(1-\xi)\cdot\ddot{\overline{\omega_i}}(l) \text{ ——— ⑭}$$

$$P(\xi)=\sum\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\alpha\beta\cdot m}{(m^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}\cdot\sin m\pi\xi=\frac{\sinh\alpha\pi(2-\xi)\cdot\sin\beta\pi\xi-\sinh\alpha\pi\xi\cdot\sin\beta\pi(2-\xi)}{\cosh 2\alpha\pi-\cos 2\beta\pi}$$

$$Q(\xi)=\sum\frac{2}{\pi}\cdot\frac{m(m^2+\alpha^2-\beta^2)}{(m^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}\cdot\sin m\pi\xi=\frac{\cosh\alpha\pi(2-\xi)\cdot\cos\beta\pi\xi-\cosh\alpha\pi\xi\cdot\cos\beta\pi(2-\xi)}{\cosh 2\alpha\pi-\cos 2\beta\pi}$$

ここで $\alpha=\dfrac{\sqrt{A+2C}}{2}$　　$\beta=\dfrac{\sqrt{2C-A}}{2}$　　$C=\sqrt{B}$

$$A=\frac{GJ}{EI}\cdot\frac{4\cdot D_i}{(4-D_i)}\left(\frac{l}{\pi\lambda}\right)^2\quad B=\left\{\frac{K\cdot(6-D_i)}{6}-\frac{P\cdot D_i}{\lambda}\right\}\left\{\frac{4}{EI}\cdot\frac{1}{(4-D_i)}\cdot\left(\frac{l}{\pi}\right)^4\right\}$$

よって，$x=0$ 端での剪断力のつり合いより

$$\therefore\frac{EI}{4}(4-D_i)\left[\left\{\ddot{Q}(0)+\frac{1}{2\alpha\beta}\ddot{P}(0)\right\}\cdot\overline{\omega_i}(0)+\frac{1}{2\alpha\beta}\cdot\ddot{P}(1)\cdot\ddot{\overline{\omega_i}}(l)\right]-\frac{GJ}{\lambda^2}D_i\left[\left\{\dot{Q}(0)+\frac{1}{2\alpha\beta}\cdot\dot{P}(0)\right\}\cdot\overline{\omega_i}(0)+\frac{1}{2\alpha\beta}\cdot\dot{P}(1)\cdot\ddot{\overline{\omega_i}}(l)\right]$$

$$=0 \text{ ——— ⑮}$$

又，$x=l$ 端でたわみ角がないことより　$\left\{\dot{Q}(1)+\frac{1}{2\alpha\beta}\dot{P}(1)\right\}\cdot\overline{\omega_i}(0)+\frac{1}{2\alpha\beta}\cdot\dot{P}(0)\cdot\ddot{\overline{\omega}}(l)=0$ ——— ⑯

故に，⑮⑯より P なる座屈荷重が求まり，境界値 $\overline{\omega_i}(0)$，$\ddot{\overline{\omega_i}}(l)$ を決定し，⑰式に示す如くの fourier－sine 定和分逆変換によりたわみ（モード）を求めることができる。

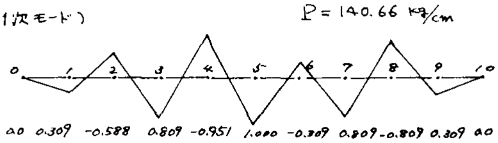
$$\therefore\omega_r(x)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\overline{\omega_i}(x)\cdot\sin\frac{i\pi}{n}r \text{ ———— ⑰}$$

3．数値計算例

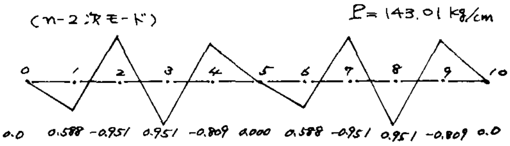
$n=10$　$l=100\,cm$　$\lambda=10\,cm$　$E=2.1\times10^6\,kg/cm^2$　$G=8.0\times10^5\,kg/cm^2$

$x=0$，l 端，Simple Support

（$n-1$次モード）　$P=140.66\,kg/cm$



（$n-2$次モード）　$P=143.01\,kg/cm$



※参考文献　S.G. Nomachi：A Note on Finite Fourier Transforms Concerning Finite Integration.
Memoris, Muroran. I.T vol5. No.2