

金沢大学 正・西田 進

金沢大学 正 吉田 博

金沢大学 正 喜内 敏

1. 緒言

テーパを有する柱の強性座屈強度解析について数多くの研究がなされ、その成果が "Hand Book of Structural Stability" (1971年) に紹介されている。ここに示す方法は柱の強度を低下させるものとして文献1) に指摘されている。断面の塑性化による剛性の低下、荷重の偏心、残留応力の影響を考慮して変断面鋼柱の強度と変形の検討を行うものである。解析方法は各種断面係数を無次元化し、その変化項のみを用いることにより一般性を持たせ、座屈強度は *Transfer Matrix* 法を用いて解析し、はり-柱の面内強度は数値積分法を用いて解析した。

2. 用いた仮定

変断面鋼柱の解析に当って、一般に座屈解析に用いられる仮定のほかに次の仮定を用いた。

- 1) 断面を図-1 のようにフランジ中を、部材高さを d とし、ウェブ高さを λd とし、ウェブの影響を無視する。
- 2) 断面には溶接による残留応力が図-1 のように理想化された形で分布しており、この応力分布は部材の全長にわたって一様である。
- 3) 各断面定数は断面の一部が塑性域に入った場合は弾性域のみが有効であるとする。ただし、*St. Venant* のねじり剛性は塑性流れ理論を用いる。

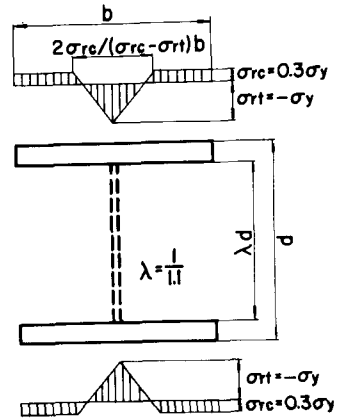


図-1 仮定断面と残留応力分布

強軸および弱軸まわりのオイラー座屈、ねじれ座屈、および曲げねじれ座屈解析は次のように行う。

- I) モーメント-軸力-各種断面係数関係は図-1 に示す断面について断面分割法³⁾を用いて計算を行ったものを無次元化して用いる。
- II) フランジ中は $t_0 \sim \beta t_0$ 、部材高さは $d_0 \sim \alpha d_0$ まで直線的に変化し、鋼柱を部材長さに n 、 n 等分し、分割された部材は、その中点の弾塑性断面諸量、荷重項でもって代表するものとする。 i 番目部材にはサフィクス i をつけると各弾性断面諸量は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 A_i &= 2 t_i t_i = (1-\lambda) \alpha_i \beta_i t_0 d_0 & I_{x_i} &= \frac{1}{12} t_0 \{ d_i^3 - (d_i - 2 t_i)^3 \} = \frac{1}{12} (1-\lambda)^3 \alpha_i^3 \beta_i^3 t_0 d_0^3 \\
 W_i &= I_{x_i} \frac{d_i}{2} = \frac{1}{6} (1-\lambda)^3 \alpha_i^3 \beta_i^3 t_0 d_0^3 & I_{y_i} &= \frac{1}{6} t_i^3 t_i = \frac{1}{12} (1-\lambda) \alpha_i \beta_i^3 t_0^3 d_0^3 \\
 I_{W_i} &= I_{y_i} \left(\frac{d_i - t_i}{2} \right)^2 = \frac{1}{192} (1-\lambda) (1+\lambda)^2 \alpha_i^2 \beta_i^3 t_0^3 d_0^3 & K_{T_i} &= \frac{2}{3} t_i t_i^2 = \frac{1}{12} (1-\lambda)^3 \alpha_i^3 \beta_i t_0 d_0^3 \\
 I_{x_i}^2 &= \frac{I_{y_i}}{A_i} = \frac{1}{12} (1+\lambda+\lambda^2) \alpha_i^2 \alpha_i^3 & t_{y_i} &= \frac{I_{y_i}}{A_i} = \frac{1}{12} \beta_i^2 t_0^2
 \end{aligned} \tag{1}$$

ここに \$A\$ は断面積、\$I_x, I_y, W, I_w, K_T, k_x, k_y\$ はそれぞれ強軸回り、弱軸回りの断面二次モーメント、強軸回りの断面係数、\$Y\$ 二次モーメント、\$S_2, Venant\$ のねじり定数、強軸、弱軸回りの断面二次半径を示す。

II) Field Matrix は座屈解析に用いられる微分方程式の無次元化を行う。左端と右端の任意の境界条件の下に解いたものを下に記す。

曲げ座屈

$$\begin{pmatrix} \frac{U}{l} \\ \theta \\ \frac{M}{Pl} \\ \frac{Q}{P} \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 - \cos t & \frac{t - \sin t}{t} \\ 0 & 1 & -t \sin t & \cos t - 1 \\ 0 & 0 & \cos t & -\frac{\sin t}{t} \\ 0 & 0 & -t \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{U}{l} \\ \theta \\ \frac{M}{Pl} \\ \frac{Q}{P} \end{pmatrix}_L$$

ここに、\$l = \frac{L}{\eta}\$

$$\delta^2 = \frac{P}{EI y_i} \delta^2 = \frac{\sigma_y}{E} \frac{d}{a_{3i}} \cdot \left(\frac{l}{r_{y0}} \right)^2 \frac{1}{\alpha_i \beta_i^2} \quad (2)$$

\$\sigma_y\$ 降伏応力 \$E\$ 弾性係数
 \$\delta\$ 作用軸力と \$z=0\$ 点における降伏軸力との比
 強軸回りの座屈は \$I_{y_i}\$ と \$I_{x_i}\$ に変えればよい。

ねじり座屈

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ l\varphi \\ \frac{M_w l}{EI_w} \\ \frac{M_w l}{GK_T l} \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 + \frac{1}{\eta^2} (t - \sin t) & \frac{1}{\eta^2} (\cos t - 1) & -\frac{1}{\eta^2} (t - \sin t) \\ 0 & 1 + \frac{1}{\eta^2} (1 - \cos t) & -\frac{1}{\eta^2} \sin t & \frac{1}{\eta^2} (\cos t - 1) \\ 0 & -\frac{1}{\eta^2} \sin t & \cos t & \frac{1}{\eta^2} \sin t \\ 0 & (1 + \frac{1}{\eta^2})(1 - \cos t) & -(\frac{1}{\eta^2} t) \sin t & \cos t + \frac{1}{\eta^2} (\cos t - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ l\varphi \\ \frac{M_w l}{EI_w} \\ \frac{M_w l}{GK_T l} \end{pmatrix}_L$$

$$\eta = \frac{EI_w}{GK_T l^2} = \alpha_{wi} \frac{E}{G} \frac{(1+\lambda)^2 \beta_i^2}{16(1-\lambda)^2} \left(\frac{l_0}{l} \right)^2 \quad (3)$$

$$\delta^2 = \frac{(Pl_i - GK_T) l^2}{EI_w} = \frac{(\sigma_y / 16 \alpha_{wi}^2 (1+\lambda)^2 \alpha_i^2 \beta_i^2 \frac{l_0^2}{l^2})}{(1+\lambda)^2 \alpha_i^2 \beta_i^2 \alpha_{wi}} \cdot \frac{1}{16} \frac{G}{E} \frac{(1-\lambda)^2}{(1+\lambda)^2 \alpha_i^2 \alpha_{wi}} \left(\frac{l}{l_0} \right)^2$$

\$G\$ せん断弾性係数

曲げねじり座屈

$$\begin{pmatrix} \frac{U}{l} \\ \theta \\ \varphi \\ l\varphi \\ \frac{S l^2}{EI_y} \\ \frac{M_y}{EI_y} \\ \frac{M_w l}{GK_T} \\ \frac{M_w l}{EI_w} \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{S_3 - A_2 A_3}{\eta A_2^2 A_1} & \frac{S_7 - A_2 A_4}{A_2^2 A_1} & \frac{C_9 - A_4}{A_2^2 A_1} & \frac{-S_3 + A_2 A_3}{\eta A_2^2 A_1} & \frac{A_3 - C_4}{A_2^2 A_1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{C_4 - A_3}{\eta A_2^2 A_1} & \frac{C_9 - A_4}{A_2^2 A_1} & \frac{S_8}{A_2 A_1} & \frac{-C_4 + A_3}{\eta A_2^2 A_1} & \frac{-S_2}{A_2 A_1} \\ 0 & 0 & 1 & 1 + \frac{S_7 A_2 A_5}{\eta A_2^2 A_1} & \frac{A_6 (S_3 - A_2 A_3)}{A_2^2 A_1} & \frac{A_6 (C_4 - C_3)}{A_2^2 A_1} & \frac{-S_7 + A_2 A_5}{\eta A_2^2 A_1} & \frac{A_5 - C_8}{A_2^2 A_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{C_8 - C_5}{\eta A_2^2 A_1} & \frac{A_6 (C_4 - A_3)}{A_2^2 A_1} & \frac{A_6 S_2}{A_2 A_1} & \frac{-C_8 + A_5}{\eta A_2^2 A_1} & \frac{-S_6}{A_2 A_1} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{C_1}{\eta A_1} & -\frac{C_7}{A_1} & -\frac{S_5}{A_1} & \frac{C_1}{\eta A_1} & \frac{S_1}{A_1} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{S_2}{\eta A_2 A_1} & -\frac{S_8}{A_2 A_1} & -\frac{C_7}{A_1} & \frac{S_2}{\eta A_1 A_2} & \frac{C_1}{A_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{C_6 - C_8 A_5}{A_1 \eta A_2^2 A_1} & \frac{\eta C_1 A_6 A_1 (C_4 - A_3)}{A_1 A_2^2 A_1} & \frac{A_6 S_2}{A_2 A_1} & \frac{C_6 - C_8 A_5}{A_1 \eta A_2^2 A_1} & \frac{\eta S_4}{A_1} & \frac{S_6}{A_2 A_1} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{S_6}{\eta A_2 A_1} & -\frac{A_6 S_2}{A_2 A_1} & \frac{A_6 - C_1}{A_1} & \frac{S_6}{\eta A_2 A_1} & \frac{C_6}{A_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{U}{l} \\ \theta \\ \varphi \\ l\varphi \\ \frac{S l^2}{EI_y} \\ \frac{M_y}{EI_y} \\ \frac{M_w l}{GK_T} \\ \frac{M_w l}{EI_w} \end{pmatrix}_L$$

$$\begin{aligned} S1 &= \alpha_1 \sinh \alpha_1 + \alpha_2 \sin \alpha_2 \\ S2 &= \alpha_2 \sinh \alpha_1 - \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ S3 &= \alpha_2^2 \sinh \alpha_1 + \alpha_1^2 \sin \alpha_2 \\ S4 &= \alpha_1 \alpha_2 \sinh \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ S5 &= \alpha_2 \alpha_1 \sinh \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_2 \sin \alpha_2 \\ S6 &= \alpha_1 \alpha_2 \sinh \alpha_1 - \alpha_2 \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ S7 &= \alpha_1 \alpha_2^2 \sinh \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_1^2 \sin \alpha_2 \\ S8 &= \alpha_2 \alpha_2^2 \sinh \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ S9 &= \alpha_2 \alpha_2^2 \sinh \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_1^2 \sin \alpha_2 \\ C1 &= \cosh \alpha_1 - \cos \alpha_2 \\ C2 &= \alpha_1 \cosh \alpha_1 + \alpha_2 \cos \alpha_2 \\ C3 &= \alpha_2 \cosh \alpha_1 - \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ C4 &= \alpha_2^2 \cosh \alpha_1 + \alpha_1^2 \cos \alpha_2 \\ C5 &= \alpha_1 \cosh \alpha_1 + \alpha_2 \cos \alpha_2 \\ C6 &= \alpha_1 \cosh \alpha_1 - \alpha_2 \cos \alpha_2 \\ C7 &= \alpha_2 \cosh \alpha_1 - \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ C8 &= \alpha_1 \alpha_2^2 \cosh \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_1^2 \cos \alpha_2 \\ C9 &= \alpha_2 \alpha_2^2 \cosh \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_1^2 \cos \alpha_2 \end{aligned}$$

$$A1 = \alpha_1 - \alpha_2 \quad A2 = \alpha_1 \alpha_2 \quad A3 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \quad A4 = \alpha_1 \alpha_1^2 + \alpha_2 \alpha_2^2 \quad A5 = \alpha_1 \alpha_2^2 + \alpha_2 \alpha_1^2 \quad A6 = \alpha_1 \alpha_2$$

$$\alpha_1 = \frac{P_i l_i}{M_i + P y_{oi}} \frac{EI_{yi}}{(M_i + P y_{oi}) l_i} \alpha_i^2 \quad \frac{P_i l_i}{M_i + P y_{oi}} = \frac{6 \alpha_{wi}}{(1+\lambda+\lambda^2) \alpha_{2i} + 6 \alpha_{2i} \alpha_{7i}} \cdot \frac{1}{\alpha_i} \cdot \frac{l_0}{d_0} \left(\frac{l}{l_0} \right)$$

$$\alpha_2 = \frac{P_i l_i}{M_i + P y_{oi}} + \frac{EI_{yi}}{(M_i + P y_{oi}) l_i} \alpha_i^2 \quad \frac{EI_{yi}}{(M_i + P y_{oi}) l_i} = \frac{E}{\sigma_y} \frac{\alpha_{wi}}{2(1+\lambda+\lambda^2) \alpha_{2i} + 12 \alpha_{wi} \alpha_{7i}} \frac{\beta_i^2}{\alpha_i} \cdot \frac{l_0}{d_0} \left(\frac{l}{l_0} \right) \quad (4)$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1^2 + 4\lambda_2}}{2}}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{-\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1^2 + 4\lambda_2}}{2}}$$

$$\lambda_1 = \left\{ \frac{GK_{Tc}(1-a_{2c})}{E^2 I_{w_c}} - \frac{P_c}{E I_{y_c}} \right\} l^2 = \left\{ \frac{G}{E} \cdot \frac{16(1-\lambda)^2(1-a_{2c})}{(1+\lambda)^2 a_{4c}} - 12 \frac{\sigma_x}{E} \frac{a_{2c}}{a_{3c}} \right\} \frac{1}{\beta_c^2} \left(\frac{l}{l_0} \right)^2 \quad (5)$$

$$\lambda_2 = \frac{GK_{Tc}(1-a_{2c})P_c + (q_{1c} + P_{2c})^2}{E^2 I_{w_c} I_{y_c}} l^2 = \left\{ \frac{G}{E} \frac{\sigma_x}{E} \frac{192(1-\lambda)^2}{(1+\lambda)^2} \cdot \frac{(1-a_{2c})a_{2c}}{a_{3c}a_{4c}} + \left(\frac{\sigma_x}{E} \right)^2 \frac{6}{(1+\lambda)^2} \cdot \frac{a_{2c} \{ a_{2c}(1+\lambda)^2 + 6a_{1c}a_{2c} \}}{a_{3c}a_{4c}} \right\} \frac{1}{\beta_c^2} \left(\frac{l}{l_0} \right)^2$$

ここに $a_{1c} = \frac{P}{P_{yc}}$ $a_{2c} = \frac{M_i}{M_{3i}}$ $a_{3c} = \frac{I_{xc} l}{I_{y_c} l}$ $a_{4c} = \frac{I_{w_c} l}{I_{w_c} l}$ $a_{1c} = \frac{(\sigma_x^2 A) l}{GK_{Tc}}$ $a_{2c} = \frac{f_{0c}}{d_c}$ $a_{3c} = \frac{(\sigma_x^2 A) l}{P_{yc} l_0^2}$ を示し、

サフィクス c は弾性域のみ有効とした時の値を示し、各値は I) より得られる。

II) 仮定と、無次元化された Field Matrix, 座屈に関する境界 Matrix, i 点における状態量 Vector の連続条件より導いた Point Matrix (無次元化によりその必要性が生じる) を用いて $\text{Det } |R_0/R_1/R_2/R_3 \dots R_i/R_{i+1}| = 0$ とするよ
うな荷重を試行錯誤により求める。

計算結果および考察

境界条件として両端単純支持 (a ケース)、細端自由、太端固定 (b ケース) を考え、無次元化表示は全て部材中央点の断面諸量で行った。強軸回りの曲げ座屈は割愛したが、柱の強度は b ケースの場合、弾性域でわずかに変断面の方が大きく、(a ケースではわずかに減少する) 細長比の小さな所では細端断面降伏荷重へと収束してゆく (図-2, 3, 4)。図-5 は曲げねじれ座屈強度曲線 (a ケース) を示し、図の計算結果より、荷重条件、断面変化率によって異なるが全体的に見て変断面部材のほうがかなり強度が大きくなっている。

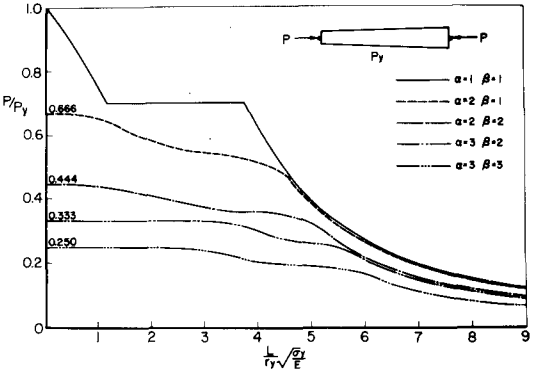


図-2 弱軸まわりの曲げ座屈強度 (両端単純支持)

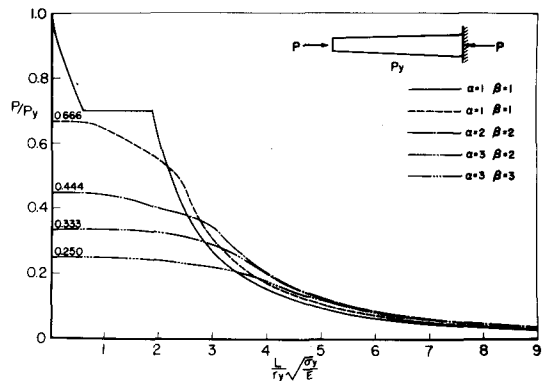


図-3 弱軸まわりの曲げ座屈強度 (一端固定, 他端自由)

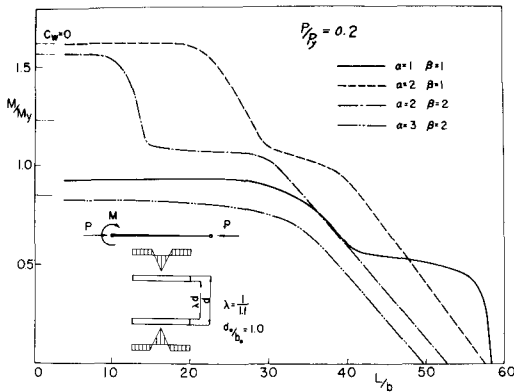


図-5 曲げねじれ座屈強度 (両端単純支持)

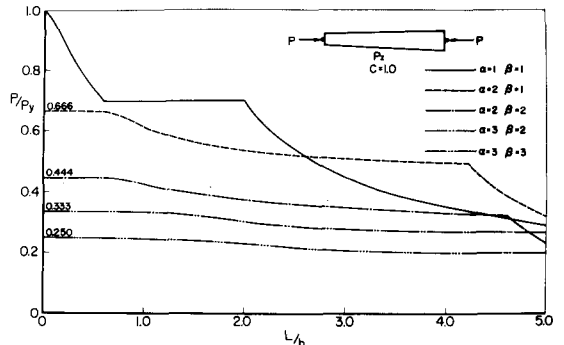


図-4 ねじれ座屈強度 (両端単純支持)

4. 面内強度解析手順

座屈強度解析手順Ⅰ、Ⅱを行なった後、分割した各要素のたわみ形状を円弧と仮定すると、 i 点と $i+1$ 点のたわみ、たわみ角、曲げモーメントの関係は次のようにして求められる。³⁾

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \phi_i l \quad l = \frac{L}{n}$$

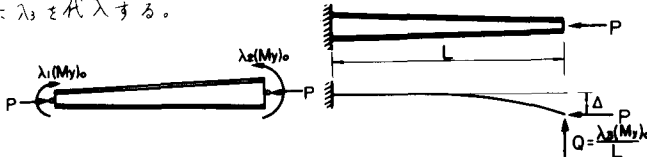
$$\frac{Z_{i+1}}{l} = \frac{Z_i}{l} - \frac{1}{\phi_i l} (\cos \theta_{i+1} - \cos \theta_i) \quad (6)$$

$$\frac{X_{i+1}}{l} = \frac{1}{\phi_i l} (\sin \theta_i - \sin \theta_{i+1})$$

$$\frac{M_{i+1}}{M_{y_{i+1}}} = \frac{M_i}{M_{y_i}} \frac{\alpha_i \beta_i}{\alpha_{i+1} \beta_{i+1}} + \frac{1}{2n} \frac{t_{x_0}}{\alpha_0 \beta_0} \frac{P}{P_{y_0}} \frac{\alpha_i \beta_i}{\alpha_{i+1} \beta_{i+1}} \left(\frac{Z_{i+1}}{l} - \frac{Z_i}{l} \right) (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{Z_i}{l} \frac{1}{\alpha_{i+1}^2 \beta_{i+1}^2}$$

ただし、 $\phi_i = \frac{Z_i}{\phi_{y_i}} \frac{1}{n \alpha_i} \frac{2 \sigma_{y_i}}{E} \frac{t_{x_0}}{d_0} \frac{l}{t_{x_0}}$ $\frac{t_{x_0}}{d_0} = 0.42$

一端固定、他端自由の場合は $\frac{M_0}{M_{y_0}}$ に $\frac{1}{2} \frac{P}{P_{y_0}} \frac{\Delta}{L} \frac{d_0}{t_{x_0}} \frac{L}{t_{x_0}} - \lambda_2$ として λ_2 を代入する。



両端単純支持の場合 一端固定、他端自由の場合

両端で与えられた境界条件を満足するように式-6の数値積分を行い、試行錯誤により与えられた荷重に対する変形を計算する。

計算結果および考察

図-6はケースaの場合の計算結果を示し、横軸には曲げが作用している大端のたわみ角をとった。無次元化は全て部材中央点を基準とし(鋼量を等しくするため)、図中実線は $\alpha = \beta = 1.0$ 、一点鎖線は $\alpha = 1.4, \beta = 1.2$ を示す。変断面と等断面の強度比を見ると、細長比の小さいほど($L/t_x = 20$ では約1.6倍)強度が大きい。しかし変形能は等断面に比して減少している。図-7はケースbの場合で横軸に ϕ/L をとった。やはり変断面の方が強度が大きく($L/t_x = 2.0$ では約1.6倍)、変形能はケースaではほとんど変わらない。

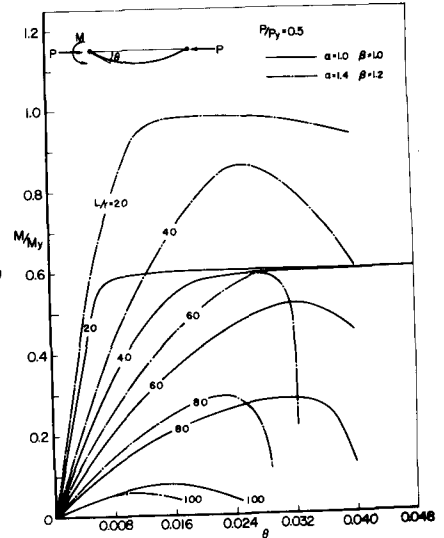


図-6 面内強度(両端単純支持)

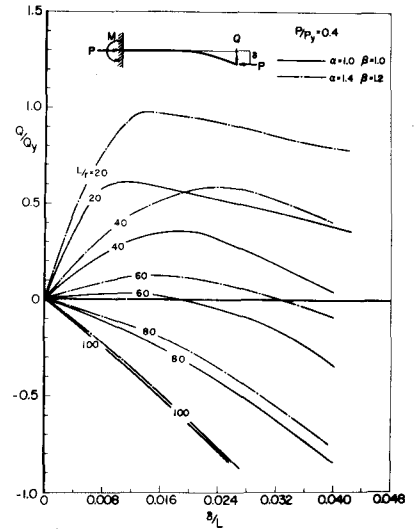


図-7 面内強度(一端固定、他端自由)

計算に当って金沢大学、大学院生の岩井弘、三島幸夫両氏の協力を得た事にここに感謝します。

- 1) V. Galambos "Structural Members and Frames" Prentice Hall New York 1968
- 2) H. Yoshida, S. Nishida "Lateral-Torsional Properties of Wide Flange Section with Residual Stress" 金沢大学工学部紀要 Vol. 6 No. 3
- 3) 喜内敏、吉田博、岩井弘 "曲げと軸圧縮力を受ける変断面柱の強度と変形状について" 1971年 中部支部講演概要集