

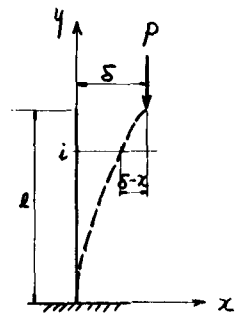
(株) 長大橋設計センター - 正会員 ○下地 寛和
 " " " 森田 泰生
 " " " 林 国守

§1. まえがき

今迄の構造設計は弾性理論に基づいて設計するのが大部分で、塑性設計のように荷重係数による設計等もしばしばみられる。本論文は弾性理論に基づいて柱を設計する際、最適設計の考え方を導入し、その実用化を試みた。構造物の最適化手法は、線形計画法と非線形計画法の二種類に分けられる。線形計画法は制約式、目的函数ともに線形式をなせばならない。その典型的な手法として Simplex 法が有名である。一方非線形計画法に対しニュートンラフソン法(Newton-Raphson Method), 最大傾斜勾配法(The Steepest Descent Method), 勾配投射法(Gradient-Projection Method), 共役勾配法(Conjugate Gradient Method), マトリックス法(Matrix Method), 等がある。この研究ではマトリックス法を用いて柱の弾性設計に適用し、最適設計における考え方、及びその適用性について試みた。

§2. 基礎方程式

右図のような等断面の柱に荷重 P が載荷された際、柱の任意断面 x における曲げモーメントは次の式で表わされる。



$$M_x = EI \frac{d^2 z}{dy^2} = P \cdot (\delta - x) \text{ ----- (1)}$$

$\beta^2 = \frac{P}{EI}$ とおくと、式(1)は $\frac{d^2 z}{dy^2} + \beta^2 z = \beta^2 \delta$ となり

この一般解は $z = C_1 \sin \beta y + C_2 \cos \beta y + \delta$ である。

境界条件 $z = y = 0$ より $C_2 = -\delta$, $y = \frac{dz}{dy} = 0$ より $C_1 = 0$

すなわち 式(1)の解は 次のようになる。

$$z = \delta(1 - \cos \beta y) \text{ ----- (2)}$$

§3. 座屈方程式

一般に

曲げ変形による歪エネルギー $\Delta U = \frac{1}{2EI} \int_0^l M_x^2 dy \text{ ----- (3)}$

外力による仕事 $\Delta T = \frac{P}{2} \int_0^l \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 dy \text{ ----- (4)}$

(1), (2)より

$$\Delta U = \frac{P^2 \delta^2}{4EI\beta} \left(\beta l + \frac{\sin 2\beta l}{2} \right) \text{ ----- (5)}$$

$$\Delta T = \frac{P\beta\delta^2}{4} \cdot (\beta l - \sin \beta l \cdot \cos \beta l) \text{ ----- (6)}$$

$\Delta U > \Delta T$ の場合、柱は安定であり

$$\Delta U = \Delta T \text{ ----- (7)}$$

のとき $P = P_{cr}$ (座屈荷重)となる。(7)の一次の解は

$$P = \frac{EI\pi^2}{4l^2}$$

であり、これが Euler の座屈荷重である。

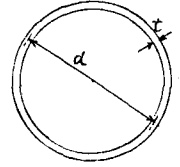
§4. 条件式

すなわち (5), (6) は

$$\Delta u = \frac{Pl^2 \delta^2}{4EI}$$

$$\Delta T = \frac{P\delta^2 \pi^2}{16l}$$

右図のように柱の断面は円管断面を用い、断面積を $A(=\pi d t)$ 、柱の径を d 、管の板厚を t 、管の長さを l 、管の断面二次モーメントを $I(=\frac{\pi}{8} d^2 t (d+2t))$ 、ヤング係数を E (弾性限界以上の座屈の場合は tangent modulus または double modulus を用いる)。とすると 座屈の条件式は



$$g_1(t, l) = \Delta u - \Delta T = 0 \quad \text{----- (8)}$$

限界応力度の条件式

$$g_2(t, l) = \sigma_{cr} \geq \frac{Per}{A} = \frac{Per}{\pi d t} \quad \text{----- (9)}$$

その他の条件式として、柱の長さの上限、下限を l_u, l_L 、板厚の上限、下限を t_u, t_L とすれば

$$g_3(t, l) = l_u \geq l \geq l_L \quad \text{----- (10)}$$

$$g_4(t, l) = t_u \geq t \geq t_L \quad \text{----- (11)}$$

§5. 目的函数

$$f(t, l) = A \cdot l = \pi d t l \quad \longrightarrow \min : \quad \text{----- (12)}$$

§6. 連続振動函数

$$P(l, t, r) = f(t, l) + r \sum_{i=1}^n \frac{W_i}{G_i(t, l)} + r^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^m W_i g_i(t, l) \longrightarrow \min : \quad \text{----- (13)}$$

但し g_i : 等条件式, G_i : 不等条件式

n, m は条件式の数

r : 振動パラメータ

W_i, w_i : ノルム, 函数の重み係数

§7. 解析方法

マトリックス法 (Variable Matrix Method) を使用.

§8. 計算例

$d=30\text{cm}$, $E=2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$, $\sigma_{cr}=3200 \text{kg/cm}^2$,
 $l_u=800\text{cm}$, $l_L=200\text{cm}$, $t_u=3.0\text{cm}$, $t_L=1.0\text{cm}$ と
 式(13)を最小にするよう計算した. 板厚 t と座屈荷重 Per 及び座屈長さ l 、柱の全体積の関係は、右のようになる. 実線を示している矢印は長さ $l=600\text{cm}$, $t=1.2\text{cm}$, $d=30\text{cm}$ の管柱を使用したときの座屈荷重 $Per=200^t$ に対応する柱の全体積は $68,000\text{cm}^3$ であることを示している.

§9. 参考文献

Davidon W.C., "Variable Matrix Method For Minimization" Arg. Nat. Lab. Illinois 1959
 Stephen P. Timoshenko & James M. Gere "Theory of Elastic Stability"

