

まえがき 補剛材を有する円筒殻の座屈に関する研究は、軸方向圧縮を受けた場合の研究¹⁾、一様な外圧が作用する場合の研究²⁾など、すでに多くの文献がある。ここでは周方向(軸方向間隔 l)あるいは軸方向(周方向間隔 a_0)に補強材を取り付けた円筒殻(殻長 L)が、軸方向の圧縮力 P と側面から等変分布(軸方向、最下端烈度 δ 、最上端 0)する外圧を殻中心方向に受ける場合の危険荷重の考察をした。なお解析には、エネルギー法により座屈基本式を誘導している。

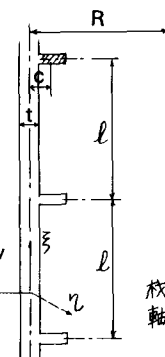


図-1

変形および応力の基本式 殻の中央面内に図-1のように ξ, η, z 軸をとリ、殻の中央面の点 $(\xi, \eta, 0)$ の ξ, η, z 方向の変位を u, v, w とすると、点 (ξ, η, z) の変位は、

$$\left\{ u - z \frac{\partial w}{\partial \xi}, v + z \left(\frac{v}{R} - \frac{\partial w}{\partial \eta} \right), w \right\} \dots \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\xi &= \bar{\epsilon}_\xi + \kappa_\xi \eta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2, & \epsilon_\eta &= \bar{\epsilon}_\eta + \left(\kappa_\eta - \frac{\bar{\epsilon}_\xi}{R} \right) \left(z - \frac{z}{R} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{v}{R} \right)^2 \\ \delta &= \left(1 - \frac{z}{R} \right) \bar{\delta} + 2 \frac{z}{R} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \left(2z - \frac{z^2}{R} \right) \kappa_{\xi\eta}, & \kappa_\xi &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, & \kappa_\eta &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \eta}, & \kappa_{\xi\eta} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{aligned} \right\}$$

ここで、 $\bar{\epsilon}_\xi = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \bar{\epsilon}_\eta = \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{w}{R}, \bar{\delta} = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$ (2)

となる。なお κ_ξ, κ_η は中央面の ξ, η 方向の曲率の変化であり、 $\kappa_{\xi\eta}$ は回転変化である。

円筒殻の曲げ理論による応力に、補剛材に生ずる応力をその間隔で除した

ものを加え、 u, v, w に関して1次の項のみとると、中央面単位巾当たりの合力およびモーメントは、

$$\left. \begin{aligned} N_\xi &= \alpha_2 \bar{\epsilon}_\xi + \nu \alpha_0 \bar{\epsilon}_\eta + B_2 \kappa_\eta, & N_\eta &= \nu \alpha_0 \bar{\epsilon}_\xi + \alpha_1 \bar{\epsilon}_\eta + B_1 \kappa_\eta, & N_{\xi\eta} &= \alpha_0 \frac{1-\nu}{2} \bar{\delta} \\ M_\xi &= D_2^* \kappa_\xi + D_0 \nu \kappa_\eta + B_2 \bar{\epsilon}_\xi, & M_\eta &= D_1^* \kappa_\eta + D_0 \nu \kappa_\xi + B_1 \bar{\epsilon}_\eta, & M_{\xi\eta} &= D_0 (1-\nu) \kappa_{\xi\eta} \end{aligned} \right\} \dots \dots (3)$$

ただし、 $\alpha_0 = \frac{Et}{1-\nu^2}, \alpha_1 = \alpha_0 + \frac{EA}{L} \sin \theta, \alpha_2 = \alpha_0 + \frac{EA}{a_0} \cos \theta, B_1 = \frac{EAc}{L} \sin \theta, B_2 = \frac{EAc}{a_0} \cos \theta,$

$$D_0 = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, D_1^* = D_0 + \frac{EI}{L} \sin \theta, D_2^* = D_0 + \frac{EI}{a_0} \cos \theta,$$

座屈基本式の誘導 (1)ポテンシャルエネルギー

研究対象の補強円筒殻が軸方向に集中荷重と側方から等変分布荷重を受けて基本応力状態にあるとき、中央面に附加変形 (u, v, w) を与えると、系のポテンシャルエネルギーが変化するが、その変化のうち、2次の項がポテンシャルエネルギー極小の原理から零となる。ポテンシャルエネルギーの変化量のうち、変位についての2次の項だけを Π とし、そのうち、ひずみエネルギーによるものを Π_1 、基本応力によるものを Π_2 、外力によるものを Π_3 とすると、

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 0 \dots \dots (4)$$

が成立つこととなる。次に Π_1, Π_2, Π_3 を求めてみる。はじめに Π_1 から考察する。ひずみエネルギー Π_1 は、一般に中央単位面積当たり、次式(5)で表わされる。

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} (N_\xi \epsilon_\xi + N_\eta \epsilon_\eta + N_{\xi\eta} \delta + M_\xi \kappa_\xi + M_\eta \kappa_\eta + 2M_{\xi\eta} \kappa_{\xi\eta}) \dots \dots (5)$$

ここで補剛材を考慮した周方向、軸方向の曲げに対する中央面上の円周方向、軸方向のひずみを $\bar{\epsilon}_\xi, \bar{\epsilon}_\eta$ とし、曲率の変化を $\bar{\kappa}_\xi, \bar{\kappa}_\eta$ とすれば、

$$\bar{\epsilon}_\xi = \bar{\epsilon}_\xi, \bar{\epsilon}_\eta = \bar{\epsilon}_\eta, \bar{\kappa}_\xi = \kappa_\xi, \bar{\kappa}_\eta = \kappa_\eta \dots \dots (6)$$

となり、式(5)は、式(2)(3)および(6)を用いて、ひずみエネルギーとして変位に関する2次の項だけとると、次式(7)のように書ける。

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \left\{ \alpha_2 \bar{\epsilon}_\xi^2 + D_2 \bar{\kappa}_\eta^2 + 2\alpha_0 \nu \bar{\epsilon}_\xi \bar{\epsilon}_\eta + \alpha_1 \bar{\epsilon}_\eta^2 + D_1 \bar{\kappa}_\xi + \frac{1-\nu}{2} \alpha_0 \bar{\delta}^2 + 2(1-\nu) D_0 \kappa_{\xi\eta}^2 + 2D_0 \nu \bar{\kappa}_\eta \bar{\kappa}_\xi \right\} \dots \dots (7)$$

ただし、 $D_1 = D_1^* - \frac{B_1^2}{\alpha_1}, D_2 = D_2^* - \frac{B_2^2}{\alpha_2}$ ところで、殻要素 $d\xi \times d\eta$ に働らく力の釣り合いから、 $\frac{\partial N_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\xi\eta}}{\partial \eta} = 0, \frac{\partial N_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_\eta}{\partial \eta} = 0$ (8) が得られるが、エアリーの応力関数 F を用いて、

$$N_\xi = \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}, N_\eta = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}, N_{\xi\eta} = -\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} \dots \dots (9)$$

および式(6)より、次式(10)の関係がある。

$$N_3 = \alpha_2 \bar{E}_\theta + \alpha_0 \bar{E}_r, \quad N_2 = \alpha_0 \nu \bar{E}_\theta + \alpha_1 \bar{E}_r, \quad N_{32} = \frac{1-\nu}{2} \alpha_0 \bar{\gamma}, \quad \bar{E}_\theta = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \bar{E}_r = \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{w}{R}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \dots (10)$$

$\bar{E}_\theta, \bar{E}_r, \bar{\gamma}$ を N_3, N_2, N_{32} で表わし、 u, v を消去し、式(9)を用いると、

$$(\alpha_1 - \nu^2 \frac{\alpha_0^2}{\alpha_2}) \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \left\{ \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0} - \nu \frac{\alpha_0}{\alpha_2} \right) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right\} F \dots (11) \quad \text{となる。従つて、} w \text{ が}$$

与えられるならば、式(11)から F を求めることができ、 N_3, N_2, N_{32} は式(9)から w の関数として求められる。

ここで、ひずみエネルギーによる Π_1 は、式(10)を用いて、 F と w で表わすと結局

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \int \frac{F}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} d\xi d\eta + \frac{1}{2} \int \left\{ D_1 \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 - \frac{2}{R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{w^2}{R^4} \right\} + D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 + D_0 \left\{ 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 - \frac{2\nu}{R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right\} \right\} d\xi d\eta \dots (12)$$

次に Π_2 は基本応力を N_{30}, N_{20}, N_{320} とすると、一般的に得られる量 $\int (N_{30} \bar{E}_\theta + N_{20} \bar{E}_r + N_{320} \bar{\gamma}) d\xi d\eta$ のうちの変位についての2次の項の分だけ、基本応力として、 $N_{30} = -\frac{P}{2LR}, N_{20} = -(1-\frac{\nu}{L})R\theta, N_{320} = 0 \dots (13)$

を考えると、 Π_2 は
$$\Pi_2 = -\frac{P}{4LR} \int \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 d\xi d\eta - \frac{R\theta}{2} \int \left(1 - \frac{\nu}{L} \right) \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 - 2 \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right\} d\xi d\eta \dots (14)$$

となる。また外力によるポテンシャルエネルギーの2次の項 Π_3 は次式(15)のように書ける。

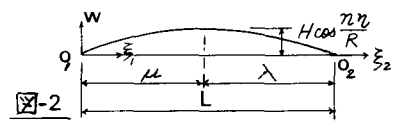
$$\Pi_3 = -\frac{P}{2LR} \int \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 d\xi d\eta + \left\{ \theta \left(1 - \frac{\nu}{L} \right) \left\{ \frac{1}{2} w \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{w}{R} \right) - \frac{u}{2} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{v}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{v}{R} \right) \right\} \right\} d\xi d\eta \dots (15)$$

ここで、 $\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{u}{L}$ は $\frac{w}{R}$ に比べて小さいから無視すれば、結局 $\Pi_2 + \Pi_3$ は次式(16)のようになる。

$$\Pi_2 + \Pi_3 = -\frac{P}{2LR} \int \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 d\xi d\eta - \theta \int \left(1 - \frac{\nu}{L} \right) \left\{ \frac{R}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{w^2}{2R} - \frac{w^2}{2R} \right\} d\xi d\eta \dots (16)$$

(2) 座屈基本式の算定 ここでは両端単純支持の場合について考

える。式(12)と(16)により、 Π を w で表わすことができたので、座屈波形 w を両端の条件を満たす次式(17)のように仮定する。



$$w = H \sin \frac{\pi \xi}{2\mu} \cos \frac{n\eta}{R}; \quad 0 < \xi < \mu, \quad w = -H \sin \frac{\pi \xi}{2\lambda} \cos \frac{n\eta}{R}; \quad -\lambda < \xi_2 < 0 \dots (17)$$

ここで、 n は円周方向の波数であり、 μ は η が一定な線上で w_{max} が生じる ξ 方向の位置を示す。いま仮定した w の式(17)を式(11)に代入すると、次式(18)のような応力関数 F が求められる。

$$F = -(\alpha_1 - \nu^2 \frac{\alpha_0^2}{\alpha_2}) \frac{H}{R} \cdot \left(\frac{\pi}{2\mu} \right)^2 \sin \frac{\pi \xi}{2\mu} \cos \frac{n\eta}{R} / A \left(\frac{\pi}{2\mu} \right) + H \left(C_0 \sinh \omega_0 \xi + C_1 \sinh \omega_1 \xi \right) \cos \frac{n\eta}{R}, \quad 0 < \xi < \mu$$

$$F = (\alpha_1 - \nu^2 \frac{\alpha_0^2}{\alpha_2}) \frac{H}{R} \cdot \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right)^2 \sin \frac{\pi \xi}{2\lambda} \cos \frac{n\eta}{R} / A \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right) + H \left(C_2 \sinh \omega_0 \xi + C_3 \sinh \omega_1 \xi \right) \cos \frac{n\eta}{R}, \quad -\lambda < \xi_2 < 0$$

ただし、 $A \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right) = \frac{\pi}{2\lambda} \left\{ \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0} - \nu \frac{\alpha_0}{\alpha_2} \right) \frac{2}{1-\nu} \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right)^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left(\frac{n}{R} \right)^4, \omega_0 \right\} = \frac{n}{R} \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \left\{ \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0} - \nu \frac{\alpha_0}{\alpha_2} \right) + \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right) \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_2} \nu^2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}$

また $C_0 \sim C_3$ の定数は、 $F, \frac{\partial F}{\partial \xi}, \bar{E}_\theta, \left(\frac{\partial \bar{E}_\theta}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial \eta} \right)$ の連続性を考慮して、次のように求められる。

$$C_0 = a \frac{\cosh \omega_0 \lambda}{\sinh \omega_0 L}, \quad C_1 = b \frac{\cosh \omega_1 \lambda}{\sinh \omega_1 L}, \quad C_2 = a \frac{\cosh \omega_0 \mu}{\sinh \omega_0 L}, \quad C_3 = b \frac{\cosh \omega_1 \mu}{\sinh \omega_1 L}$$

ここで
$$a = (\alpha_1 - \nu^2 \frac{\alpha_0^2}{\alpha_2}) \frac{1}{R} \frac{1}{\omega_1^2 - \omega_0^2} \left\{ \frac{\omega_1^2 \left(\frac{\pi}{2\mu} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\mu} \right)^4}{A \left(\frac{\pi}{2\mu} \right)} - \frac{\omega_1^2 \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right)^4}{A \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right)} \right\}, \quad b = (\alpha_1 - \nu^2 \frac{\alpha_0^2}{\alpha_2}) \frac{1}{R} \frac{1}{\omega_1^2 - \omega_0^2} \left\{ \frac{\omega_1^2 \left(\frac{\pi}{2\mu} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\mu} \right)^4}{A \left(\frac{\pi}{2\mu} \right)} + \frac{\omega_0^2 \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right)^4}{A \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right)} \right\}$$

結局式(4)を考慮して、危険荷重算定式は次式(19)のように求められる。

$$P(n, \mu) = 8 \left(\frac{\pi}{2\mu} + \frac{\pi}{2\lambda} \right)^2 \left\{ (\alpha_1 - \nu^2 \frac{\alpha_0^2}{\alpha_2}) \frac{\pi}{8R} \left\{ \left(\frac{\pi}{2\mu} \right)^3 A \left(\frac{\pi}{2\mu} \right) + \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right)^3 A \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right) \right\} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2\mu} \right)^2 \left\{ C_0 \frac{\omega_0}{\omega_1^2 + \left(\frac{\pi}{2\mu} \right)^2} \cosh \omega_0 \mu + C_1 \frac{\omega_1}{\omega_1^2 + \left(\frac{\pi}{2\mu} \right)^2} \cosh \omega_1 \mu \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right)^2 \left\{ C_2 \frac{\omega_0}{\omega_1^2 + \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right)^2} \cosh \omega_0 \lambda + C_3 \frac{\omega_1}{\omega_1^2 + \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right)^2} \cosh \omega_1 \lambda + \frac{D_2 L}{4R} \left(\frac{\pi}{2\mu} + \frac{\pi}{2\lambda} \right) + \frac{D_1 L}{4R^3} (\pi^2 - 1)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{D_2 L R}{8} \left\{ \left(\frac{\pi}{2\mu} \right)^3 + \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right)^3 \right\} - \frac{\theta}{8} (\pi^2 - 1) \left\{ L - (\mu - \lambda) \frac{4}{\pi^2} \right\} \right\} \dots (19)$$

数値計算 1例として、側面に水圧を受ける $L=40^m, t=0.8^cm$ の中空円形断面柱に、補剛板 6^cm^2 を円周方向に $l=1^m$ の間隔で入れた場合の、 R の変化による最小危険応力度との関係 (r は最小回転半径) はつぎのとおり。 L/r 140, 120, 100, (80) に対し、 G_{cr} kg/cm^2 は 1320, 1580, 2240, (3320) である。

参考文献 1) 倉西正嗣, 彈性学 624~632P

2) 山本善之, 補強円筒殻の外圧による全体的圧壊の研究, 造船協会論文集 113号