

関西大学工学部 正会員 三上市 藏
 関西大学大学院 学生員 ○小林 公博
 関西大学工学部 正会員 米沢 博

まえがき プレートガーダーなど長方形腹板を有するI形断面げたの全体座屈に関してはかなり研究がなされてきた。しかし扇形腹板を有するI形断面曲がりばりの全体座屈に関する研究はあまり見あたらないようである。ここでは扇形腹板が外側および内側フランジによって弾性支持および弾性固定されているとし、I形断面曲がりばりの全体座屈を解析した。その際、両フランジと扇形腹板の一部とが非弾性域に入ることを考慮した。

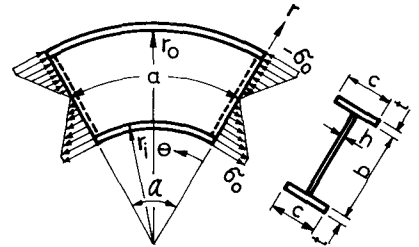


図-1

微分方程式とその解 I形断面曲がりばりが図-1に示すように純曲げを受ける場合を考える。すなわち極異方性扇形板が $\theta=0, \alpha$ で単純支持され、両フランジで弾性支持および弾性固定されているものとする。

非弾性域では曲げ剛さなどが一定とはならないから、腹板部分が座屈したときのたわみ曲面の微分方程式としてつぎの極異方性変厚板の式を用いる。

$$\begin{aligned}
 & D_r \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r^2} (\nu_r D_\theta + 2D_{r\theta}) \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{D_\theta \partial^4 w}{r^4 \partial \theta^4} + 2 \left(\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{D_r}{r} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial \nu_r D_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial D_{r\theta}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} + (-2 \frac{\partial^2 \nu_r D_\theta}{r^2} + 2D_{r\theta}) \\
 & + \frac{2}{r^2} \left(-\frac{\partial \nu_r D_\theta}{\partial r} + 2 \frac{\partial D_{r\theta}}{\partial r} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{2}{r^4} \frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \left(\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \nu_r D_\theta}{\partial \theta^2} - D_\theta \right) + \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial \nu_r D_\theta}{\partial r} + 2 \frac{\partial D_{r\theta}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 D_r}{\partial r^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\
 & + \left(\frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} - 2 \frac{\partial D_{r\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{4}{r^2} \frac{\partial^2 D_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \left(\frac{1}{r^4} \left(\frac{\partial^2 D_\theta}{\partial \theta^2} + 2 \nu_r D_\theta + 2D_\theta + 4D_{r\theta} \right) - \frac{1}{r^3} \left(2 \frac{\partial \nu_r D_\theta}{\partial r} + \frac{\partial D_\theta}{\partial r} + 4 \frac{\partial D_{r\theta}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \nu_r D_\theta}{\partial r^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\
 & + \left(\frac{1}{r^3} \left(D_\theta + \frac{\partial^2 D_\theta}{\partial \theta^2} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial D_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \nu_r D_\theta}{\partial r^2} \right) \frac{\partial w}{\partial r} + \left(\frac{4}{r^4} \frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} - \frac{4}{r^3} \frac{\partial D_{r\theta}}{\partial r} \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} = \sigma_r h \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + 2\sigma_\theta h \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \sigma_\theta h \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \dots (1)
 \end{aligned}$$

ここに D_r, D_θ は半径方向および接線方向の曲げ剛さ、 $2D_{r\theta}$ は極異方性板のねじり剛さ、 ν_r, ν_θ は半径方向および接線方向のポアソン比、 h は腹板厚、 σ_r, σ_θ は半径方向および接線方向における面内引張応力、 $\sigma_{r\theta}$ はせん断応力である。

外側および内側のフランジが座屈したときの微分方程式はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(B_b \left(\frac{1}{r^2} \frac{d^2 w_b}{d\theta^2} - \frac{\phi}{r} \frac{b}{\theta} \right) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(C_b \left(\frac{1}{r} \frac{d\phi}{d\theta} + \frac{1}{r^2} \frac{dw_b}{d\theta} \right) \right) + [\sigma_\theta]_{r=r_0, r_i} \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w_b}{d\theta^2} \pm [\sigma_r]_{r=r_0, r_i} h \phi_b \\
 & = \mp \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \left(D_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_r D_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right) + \frac{4\theta}{r^2} \left(D_{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right) \right. \\
 & \left. - D_\theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\nu_r D_\theta}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]_{r=r_0, r_i} \dots \dots \dots (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & B_b \left(\frac{1}{r^2} \frac{d^2 w_b}{d\theta^2} - \frac{\phi}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{d}{d\theta} \left(C_b \left(\frac{1}{r} \frac{d\phi}{d\theta} + \frac{1}{r^2} \frac{dw_b}{d\theta} \right) \right) + [\sigma_\theta]_{r=r_0, r_i} \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \phi_b}{d\theta^2} \\
 & = \mp \left[D_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_r D_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right]_{r=r_0, r_i} \dots \dots \dots (3)
 \end{aligned}$$

ここに B_b, C_b, F および I_0 はフランジの面内曲げ剛さ、純ねじり剛さ、断面積およびフランジの重心

に関する極小モーメントである。

非弾性域では $D_r, D_\theta, D_{r\theta}, \nu_r, \nu_\theta, B_b$ および C_b がそれぞれ $D'_r, D'_\theta, D'_{r\theta}, \nu'_r, \nu'_\theta, B'_b$ および C'_b に変化すると考え、つぎの係数を導入する。

$$\tau_r = D'_r/D_r, \tau_\theta = D'_\theta/D_\theta, \tau_{r\theta} = D'_{r\theta}/D_{r\theta}, \tau_1 = \nu'_r D'_\theta / \nu_r D_\theta = \nu'_\theta D'_r / \nu_\theta D_r, \tau_b = B'_b/B_b, \tau_c = C'_b/C_b \dots (4)$$

θ 方向に応力が変化しないと仮定すると、これら τ は r のみの関数である。 τ の値としては Bleich の与えた $\tau = (\sigma_Y - \sigma) \sigma / (\sigma_Y - \sigma_p) \sigma_p$ (ただし σ_Y : 降伏応力, σ_p : 比例限度応力, σ : 作用応力) を用いる。応力分布としては $\sigma_\theta = \sigma_0 [1 - 2(r - r_1) / (r_0 - r_1)]$, $\sigma_r = \sigma_{r\theta} = 0$ とする。

式(1)の解として $\theta=0, \alpha$ において境界条件を満足する関数

$$w = r_0 \sum_{m=1}^{\infty} R(n) \sin(m\pi\theta/\alpha), \quad n = r/r_0 \dots (5)$$

を仮定し、式(1)へ代入するとつぎの常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \tau_r n^4 \frac{d^4 R}{dn^4} + 2(\eta \frac{d\tau_r}{dn} + \tau_r) \eta^3 \frac{d^3 R}{dn^3} + (\eta^2 \frac{d^2 \tau_r}{dn^2} + 2\eta \frac{d\tau_r}{dn} - K\tau_\theta - M_p \tau_{r\theta} + M_V (\eta \frac{d\tau_1}{dn} - 2\phi\tau_1)) \eta^2 \frac{d^2 R}{dn^2} \\ & + \{-K(\eta \frac{d\tau_\theta}{dn} - \tau_\theta) - M_p (\eta \frac{d\tau_{r\theta}}{dn} - \tau_{r\theta}) + M_V (\eta^2 \frac{d^2 \tau_1}{dn^2} - 2\phi\eta \frac{d\tau_1}{dn} + 2\phi\tau_1)\} \eta \frac{dR}{dn} + [K\phi(\eta \frac{d\tau_\theta}{dn} - (2-\phi)\tau_\theta) + M_p (\eta \frac{d\tau_{r\theta}}{dn} - \tau_{r\theta}) \\ & - M_V \phi (\eta^2 \frac{d^2 \tau_1}{dn^2} - 2\eta \frac{d\tau_1}{dn} + 2\tau_1)] R = k\mu \left(\frac{\sigma_\theta}{\sigma_0} (\eta^3 \frac{dR}{dn} - \phi n^2 R) \right) \dots (6) \end{aligned}$$

ただし $K = D_\theta/D_r, M_p = 4\phi D_{r\theta}/D_r, M_V = \nu_r D_\theta/D_r, \phi = (m\pi/\alpha)^2, k = \sigma_0/\sigma_e, \sigma_e = \pi^2 D_\theta/b^2 h, \mu = \pi^2 D_\theta/(1-\rho)^2 D_r$ である。

式(2),(3)の解を

$$w_b = r_0 \sum_{m=1}^{\infty} A_1 \sin(m\pi\theta/\alpha) \dots (7) \quad \phi_b = \sum_{m=1}^{\infty} A_2 \sin(m\pi\theta/\alpha) \dots (8)$$

とおくと腹板コフランジの連続条件 $w_b = (w)_{r=r_1, r_0}, \phi_b = (-\partial w/\partial r)_{r=r_1, r_0}$ から $A_1 = (R)_{n=\rho, 1}, A_2 = (dR/dn)_{n=\rho, 1}$ となるから式(2),(3)はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} & \pm \tau_r n^4 \frac{d^4 R}{dn^4} \pm (\eta \frac{d\tau_r}{dn} + \tau_r) \eta^3 \frac{d^3 R}{dn^3} + (M_b \tau_b + N_b \tau_c + K\eta \tau_\theta + M_V \eta (\eta \frac{d\tau_1}{dn} - \phi\tau_1) + M_p \tau_{r\theta}) \eta \frac{dR}{dn} - (M_b \phi \tau_b + N_b \tau_c + K\phi \eta \tau_\theta \\ & + M_V \phi (\eta \frac{d\tau_1}{dn} - \tau_1) + M_p \tau_{r\theta}) R = k\mu \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0} M_F n^2 R \dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \pm \tau_r n^3 \frac{d^3 R}{dn^3} + (\frac{M_b}{\phi} \tau_b + N_b \tau_c + M_V \tau_1 \eta) \eta \frac{dR}{dn} \\ & - (M_b \tau_b + N_b \tau_c + M_V \phi \tau_1 \eta) R = -k\mu \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0} N_I n \frac{dR}{dn} \dots (10) \end{aligned}$$

ただし $M_b = B_b \phi (1-\rho)/bD_r, N_b = C_b \phi (1-\rho)/bD_r, M_F = \phi F (1-\rho)/bh, N_I = (1-\rho)^3 I_0 \phi / b^3 h, \rho = r_1/r_0$

式(6),(9),(10)を階差法を用いて解くことにした。

数値計算結果 図-2に数値計算例を示す。

数値計算においては分割数 $n=20$ とし、式(6)に対しては $(b/n)^2$ の、式(9),(10)に対しては $(b/n)^4$ の order の打ち切り誤差をさつ階差表示を用いた。これらの結果の厳密解に対する誤差は0.5%以下になっているものと考えられる。なお数値計算には、関西大学の FACOM 230-25 および大阪大学大型計算機セクターの NEAC 2200-700 を使用した。

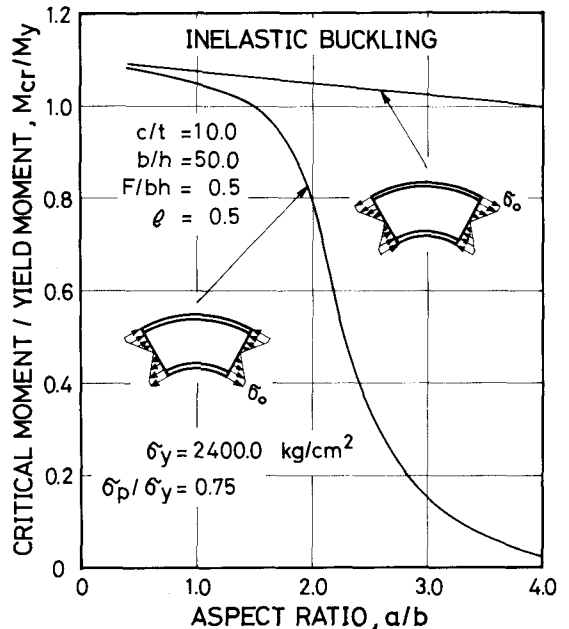


図-2