

北海道大学工学部 正員 渡辺 昇
 岩手大学工学部 正員 ○宮本 裕

1. わが国は現在長大吊橋時代を迎えている。本研究は吊橋のケーブルソケット内の応力および反力等を求めるため、回転体のモデルを考え、これに有限要素法を適用し弾性解析および塑性解析を行ったものである。

2. 解析の理論

(1) 弾性解析 軸対称構造が軸対称荷重を受けて軸対称変形を生じている場合について考える。この場合の剛性マトリックスは二次元問題の剛性マトリックスを発展することによって簡単に求めることができる。図-1においてrは半径方向座標、zは軸方向座標である。変位関数はつぎのようになる。

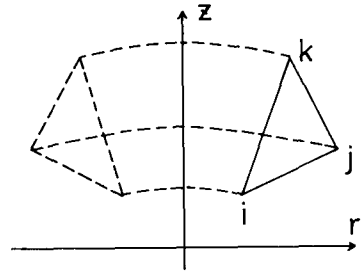


図-1

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 z, \\ w &= \alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 z \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

したがって図-2における三角形要素の節点i, j, kの変位はつぎのようになる。

$$\{d_j\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ w_i \\ w_j \\ w_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_i & z_i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r_j & z_j & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r_k & z_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_i & z_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_j & z_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_k & z_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = [A] \{\alpha\} \dots (2)$$

またひずみにはつぎのような関係がある。

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \epsilon_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 1 & \frac{z}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = [B] \{\alpha\} \dots (3)$$

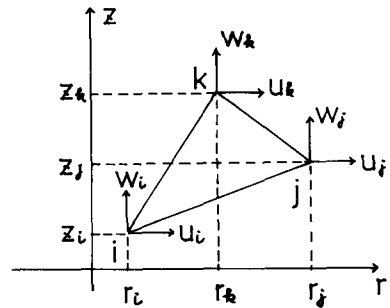


図-2

またヤング率E, ポアソン比νとすれば応力とひずみの関係はつぎのようになる。

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \epsilon_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \epsilon_{rz} \end{Bmatrix} = [D] \{\epsilon\} \dots (4)$$

図-3のように三角形要素を回転させてできる1ラジアン当りの剛性マトリックスは

$$[E] = [B][A]^{-1} = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ (\frac{1}{r}\alpha + \beta + \frac{z}{r}\gamma) & 0 \\ 0 & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}$$

とおけば $[K] = \int_V [E]^T [D] [E] dV \dots (5)$

となる。したがって $\{P\} = [K]\{d\} \dots (6)$

である。いま $[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \dots (7)$

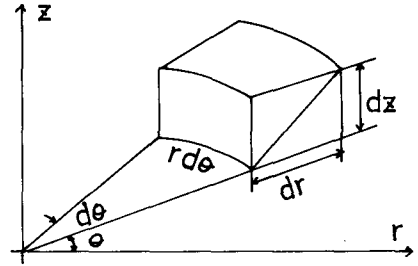


図-3

とおくと各成分の小行列はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} K_{11} &= \{ 2(D_{11} + D_{12})\beta^T\beta + D_{44}\gamma^T\gamma \} V_1 + (D_{11} + D_{12}) \{ (\alpha^T\beta + \beta^T\alpha) V_2 \\ &\quad + (\beta^T\gamma + \gamma^T\beta) V_3 \} + D_{11} \{ \alpha^T\alpha V_4 + (\gamma^T\alpha + \alpha^T\gamma) V_5 + \gamma^T\gamma V_6 \} \\ K_{12} &= (2D_{12}\beta^T\gamma + D_{44}\gamma^T\beta) V_1 + D_{12} (\alpha^T\gamma V_2 + \gamma^T\alpha V_3) \\ K_{21} &= K_{12}^T \\ K_{22} &= (D_{11}\gamma^T\gamma + D_{44}\beta^T\beta) V_1 \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

ここで $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6$ は体積積分の結果であって、近似的につきのようになる。

まず $\bar{r} = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$, $\bar{z} = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$, $F = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{vmatrix} \dots (9)$

とする。

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \int_V dV = \iint r dr dz = \bar{r} F, & V_4 &= \int_V \frac{1}{r^2} dV = \iint \frac{1}{r} dr dz \doteq \frac{1}{\bar{r}} F, \\ V_2 &= \int_V \frac{1}{r} dV = \iint dr dz = F, & V_5 &= \int_V \frac{z}{r^2} dV = \iint \frac{z}{r} dr dz \doteq \frac{\bar{z}}{\bar{r}} F, \\ V_3 &= \int_V \frac{z}{r} dV = \iint z dr dz = \bar{z} F, & V_6 &= \int_V \frac{z^2}{r^2} dV = \iint \frac{z^2}{r} dr dz \\ & & & \doteq \frac{1}{F} \left\{ \frac{(z_1 + z_2)^2}{2} + \frac{(z_2 + z_3)^2}{2} + \frac{(z_3 + z_1)^2}{2} \right\} F \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

(2) 弾塑性解析 弾塑性問題は弾性問題と同様な手法で有限要素法により解析できる。その際弾性問題と異なる点はつぎの2点である。

(i) まだに降伏してしまつた要素には弾性応力-ひずみマトリックス $[D]$ のかわりに塑性応力-ひずみマトリックス $[D^p]$ を用いる。

(ii) 荷重増分 ΔP を与えて、それによつて生じる応力増分 $\Delta \sigma_{ij}$, ひずみ増分 $\Delta \epsilon_{ij}$ を計算する。したがつて $\{\Delta \sigma\} = [D^p]\{\Delta \epsilon\} \dots (11)$ である。

$$[D^p] = \begin{bmatrix} \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{\sigma_1^2}{S} \right) & \left(\frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{S} \right) & \left(\frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{\sigma_1 \sigma_r}{S} \right) & -\frac{\sigma_1^2 \tau_{rz}}{S} \\ \left(\frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{S} \right) & \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{\sigma_2^2}{S} \right) & \left(\frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{\sigma_2 \sigma_r}{S} \right) & -\frac{\sigma_2^2 \tau_{rz}}{S} \\ \left(\frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{\sigma_1 \sigma_r}{S} \right) & \left(\frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{\sigma_2 \sigma_r}{S} \right) & \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{\sigma_r^2}{S} \right) & -\frac{\sigma_r^2 \tau_{rz}}{S} \\ -\frac{\sigma_1^2 \tau_{rz}}{S} & -\frac{\sigma_2^2 \tau_{rz}}{S} & -\frac{\sigma_r^2 \tau_{rz}}{S} & \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau_{rz}^2}{S} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix} \dots (12)$$

ここでたとえは、 $\bar{\sigma}_r$ は $\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_r - \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\theta + \bar{\sigma}_z)$ のことであり他も同様になる。また S はつぎのように与えられる。 $S = \frac{2}{3} \bar{\sigma}^2 (1 + \frac{H'}{3E}) \dots (13)$, $H' = d\bar{\sigma} / d\bar{\epsilon}^p \dots (14)$

$\bar{\sigma}$, $d\bar{\epsilon}^p$ はそれぞれ相当応力と相当塑性ひずみ増分をあらわし、つぎのようになる。
 $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij}^p \sigma_{ij}^p}$, $d\bar{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p} \dots (15)$

したがって $\{\Delta P\} = [K] \{\Delta d\} \dots (16)$ となる。

いま $[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \dots (17)$ とおくと各成分の小行列はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} K_{11} &= \{ \beta^T \beta (D_{11} + D_{22} + 2D_{12}) + (\gamma^T \beta + \beta^T \gamma) (D_{14} + D_{24}) + \gamma^T \gamma D_{44} \} V_1 \\ &+ \{ (\alpha^T \beta + \beta^T \alpha) (D_{12} + D_{22}) + (\gamma^T \alpha + \alpha^T \gamma) D_{24} \} V_2 \\ &+ \{ (\gamma^T \beta + \beta^T \gamma) (D_{12} + D_{22}) + 2\gamma^T \gamma D_{24} \} V_3 \\ &+ \alpha^T \alpha D_{22} V_4 + (\gamma^T \alpha + \alpha^T \gamma) D_{22} V_5 + \gamma^T \gamma D_{22} V_6 \\ K_{12} &= \{ \beta^T \gamma (D_{23} + D_{23}) + \gamma^T \gamma D_{43} + \beta^T \beta (D_{14} + D_{24}) + \gamma^T \beta D_{44} \} V_1 \\ &+ (\alpha^T \gamma D_{23} + \alpha^T \beta D_{24}) V_2 + (\gamma^T \gamma D_{23} + \gamma^T \beta D_{24}) V_3 \\ K_{21} &= K_{12}^T \\ K_{22} &= \{ \gamma^T \gamma D_{33} + (\beta^T \gamma + \gamma^T \beta) D_{34} + \beta^T \beta D_{44} \} V_1 \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

ここで $D_{14} = D_{24} = D_{34} = 0$, $D_{11} = D_{22} = D_{33}$, $D_{12} = D_{13} = D_{23}$ とすると弾性の剛性マトリックス式(8)に一致する。

以上の理論により弾塑性の状態の外力, 変位, ひずみ, 応力はつぎのようになる。

$$P = P + \Delta P, \quad d = d + \Delta d, \quad \epsilon = \epsilon + \Delta \epsilon, \quad \sigma = \sigma + \Delta \sigma \dots (19)$$

各要素の相当応力 $\bar{\sigma}$ は $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\tau_{xy}^2)}$... (20) により求めることができる。そして $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_Y$ になるときその要素は破壊される。ここで $\bar{\sigma}_Y$ は実験によって求める材料の降伏応力である。

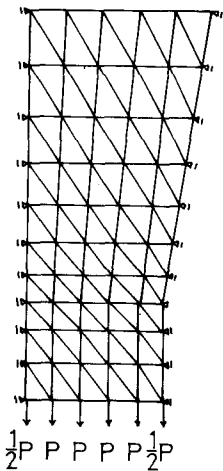


図-4

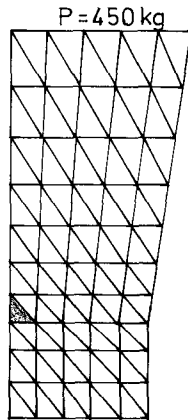


図-5

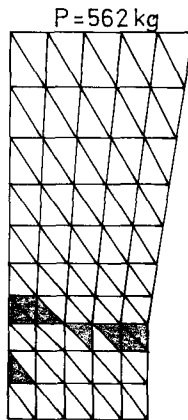


図-6

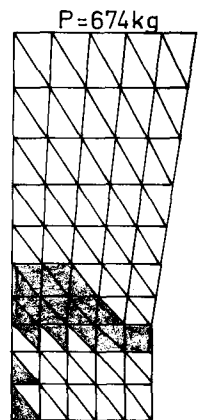


図-7

3. 数値計算例

図-4のような標準的ソケット断面を考える。ヤング率 $E = 10^6 \text{ kg/cm}^2$, ポアソン比 $\nu = 0.2$ とする。また降伏応力 $\sigma_Y = 2500 \text{ kg/cm}^2$ とし, 少くともどれか1個の要素の相当応力が降伏応力 σ_Y に達したときの荷重を初期荷重に定める。そしてそれ以後初期荷重の25%ごとに増加させ, 応力および変位を計算した。なおここでは簡単にするため, 式(13)における H を $H' = 0$ とし加工硬化がないものとした。またソケットの開き角は 90° である。

図-5から図-12までは荷重を増加させたとき, 降伏状態に達した要素の数が増加する様子を表わしている。図-13はある荷重に対する反力図を表わしている。

終りに本州四国連絡橋公団の種々なるご援助を感謝する。

なお計算は東北大学大型計算機センターのNEACと北海道大学大型計算機センターのFACOMを利用した。

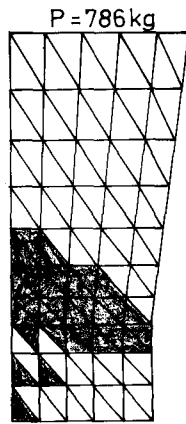


図-8

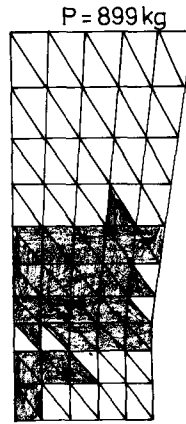


図-9

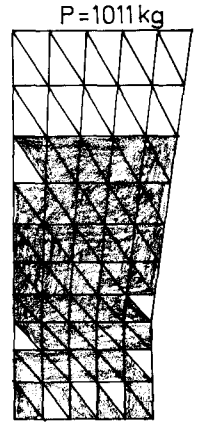


図-10

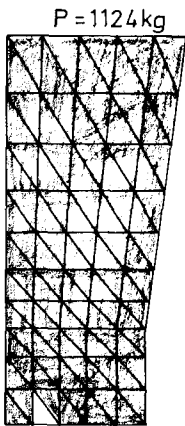


図-11

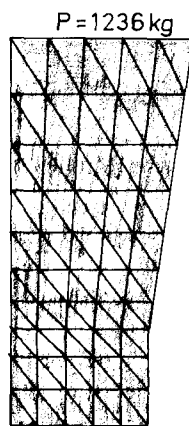


図-12

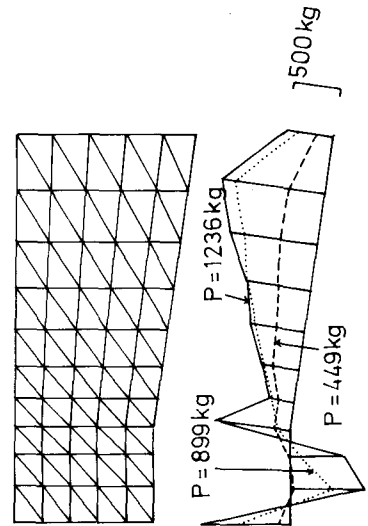


図-13