I-59　　平面棒構造物の弾塑性安定解析について

徳島大学工学部　正会員　星　治雄
〃　　〃　児嶋弘行
〃　　〃　○平尾　潔

1. はしがき

本文は漸増節点荷重をうける任意の平面棒構造物を対象として，降伏条件式に曲げと軸力の組み合せを考え，flow ruleを導入した場合の弾塑性解析[1]に軸力による曲げの影響を考慮した安定解析の方法[2]を取り入れ，挫屈と汗構化の両面から構造物の耐荷力を検討する，いわゆる，弾塑性安定解析に対する一解析方法について研究し，その解析プログラムの作成をこころみたものである。

2. 解析方法の概要

本研究は第26回大会で報告した同様な解析方法[3]における塑性解析の部分を降伏条件式に曲げと軸力の組み合せを考え，flow ruleを導入して修正したものである。したがって，本文の解析方法も前回報告したものとほぼ同様であるがその概略を示せば以下のようである。すなわち，与えられた構造物と荷重群について，1) 任意の荷重強度 P_1 に対する断面力，変形量の収束解を求める。(ただし，後述の3. 2)のような荷重倍数の決定方法を用いる場合には第1近似値を収束解とみなす。) 2) 3.で述べるような荷重倍数の決定方法にしたがって最小荷重倍数 k_{11min} を求め，最初の挫屈もしくは塑性化部材の生ずる荷重強度 P_{c1} の近似値 P_{c11} 決定し，ついで，この $P_{12}=P_{c11}$ について P_1 の場合と同様にして k_{12min} および P_{c12} を求める。このような操作を $k_{1min}\doteqdot1$ となるまで繰返し，第1段階における挫屈あるいは塑性化部材の生ずる荷重強度 P_{c1} と断面力，変形量などを決定する。この際，繰返しの計算途上において，常に釣合方程式の行列式の値(D_i)を求め，不安定現象の発生に対する判定($D_i\leqq0$：不安定)を行ない，P_{c1} より小さな荷重強度 P_c で不安定化するような場合にはその値をもって極限荷重とみなし解析を終了する。3) $k_{1min}\doteqdot1$ となった材端に降伏関節が発生(部材が挫屈)したものと考え，その部材のStiffness matrixを修正し，構造形式を変更する。また，降伏条件式が2次式の場合にはベクトル移動を行ない，この移動量を節点荷重におきかえ，釣合条件が満足されるように配分計算を行なう[1]。4) 解析手順をこの新らたな構造形式に移して，P_{c1} より大きな任意の荷重強度 P_{2i} のもとで，1)，2)，3)と同様な手順で解析を行なう。以上のような操作を繰返すことにより，不安定現象が生じない場合には新らたな材端(部材)に降伏関節(挫屈)が順次発生し，最後には構造物は汗構化して崩壊することになるからその時点で解析を終了する。なお，上述のように本解析は任意荷重強度に対する収束解を求めるためと，荷重倍数を1に収束させるためとの2重の繰返し計算が必要であり，単純な繰返し計算を行なっていたのでは解析にかなりの演算時間を要することになり，本文の解析プログラムではつぎの3.で述べるような2)，3)の近似計算の手法を取り入れるように考慮した。

3. 荷重倍数および P_{ci} (第i番目の降伏関節(挫屈)が発生するときの荷重強度)の決定方法

本文の解析プログラムでは荷重倍数および P_{ci} の決定方法としてつぎのような3通りの方法を採用しているが，その概略はそれぞれ以下のようである。

1) 単純な繰返し計算の方法で任意荷重 P_i に対する収束解(S_i)を求め，式(1)，(2)より荷重倍数 k_i

および P_{i+1} を求め，この操作を $k_{imin}\fallingdotseq 1$ となるまで繰返す方法。(図-1)

$$k_i = (S_c - S_{i-1})/(S_i - S_{i-1}),\quad (\text{ただし}, S_0 = 0) \text{ —— (1)}$$

$$P_{i+1} = k_{imin}\cdot(P_i - P_{i-1}) + P_{i-1},\quad (\text{ただし}, P_0 = 0) \text{ —— (2)}$$

2) 任意荷重 P_i に対する収束解のかわりに第1近似解 (S_i') を用いて，1)と同様に，式(1),(2)より k_i', P_{i+1}' を求め，この操作を $k_{imin}\fallingdotseq 1$ となるまで操返す方法。(図-2)

3) 任意荷重 P_i に対する収束解 (S_i) を求め，式(1),(2)より k_i, P_{i+1} を求めることは1)の場合と同様であるが，この操作を $k_{imin}\fallingdotseq 1$ となるまで繰返すのではなく，P_i と S_i の関係をつぎの式(3)のようなn次の多項式で近似し，n+1個の P_i と S_i から多項式の係数 a_1～a_{n+1} を求め，これらの係数および S_c の値を式(3)に代入して P_c の近似値を決定する方法。(図-3)

$$P_i = a_1 S_i^n + a_2 S_i^{n-1} + a_3 S_i^{n-2} + \cdots + a_n S_i + a_{n+1} \text{ —— (3)}$$

なお，本文ではこれらの1),2),3)の方法をそれぞれオーソドックスな方法，第1近似解による方法，多項式近似による方法と呼ぶことにする。

4. 解析に用いた基本式

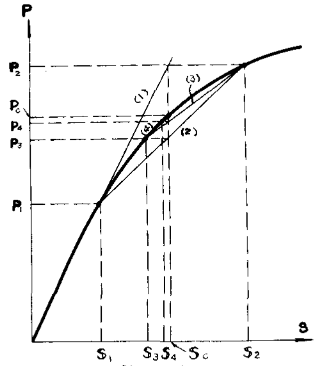
前述のように本文の解析では漸次変化する構造形式に対する解析を繰返す必要があり，筆者らはこの計算に変形法を用いた。したがって，以下に式(4)で表わされる基本式のstiffness matrix $\mathbb{K}_i$, $\mathbb{K}_j$ を各種の材端条件に応じて示す。

$$S_i = \mathbb{K}_i\cdot\delta_i + \mathbb{K}_j\cdot\delta_j,\quad (\text{ただし}, S^t = [N, Q, M],\ \delta^t = [\delta_\xi, \delta_\eta, \theta]) \text{ —— (4)}$$

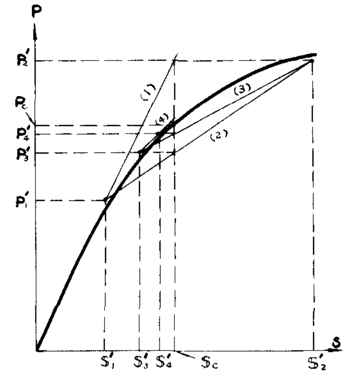
ただし，式(4)は部材軸とξ軸を一致させた部材固有の座標系ξ-ηに対する基本式である。

1) 弾性端(降伏端をもたない)部材に対するstiffness matrix

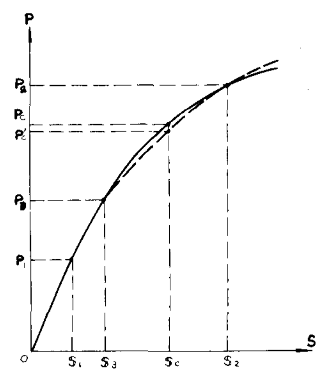
軸力による曲げの影響を考慮した基本式のstiffness matrixは材端条件に応じてそれぞれ表-1のようである[2)]が，その誘導方法については紙面の都合上省略する。なお，表-1の各係数 a, b, ---, c', d'' はそれぞれ表-2のような値である。



図－1



図－2



3次近似（図中点線） 図－3

表－1 弾性端部材に対するStiffness matrix

	$\mathbb{K}_i$	$\mathbb{K}_j$
i, j 両端剛節	$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -b & c \\ 0 & -c & d' \end{bmatrix}$
i端剛節 j端滑節	$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b' & c' \\ 0 & c' & d'' \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -b' & 0 \\ 0 & -c' & 0 \end{bmatrix}$
i端滑節 j端剛節	$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -b' & c' \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

表－2 stiffness matrix の係数

係数 a, b, ------, c', d''	係数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_6, \varphi_7$	
$a = EA/\ell$ $b = 12EI\varphi_5/\ell^3$ $c = 6EI\varphi_2/\ell^2$ $d = 4EI\varphi_3/\ell$	$N_i < 0$ (圧縮)	$\varphi_1 = \lambda\ell\sin\lambda\ell / 2(1-\cos\lambda\ell)$ $\varphi_2 = \dfrac{\lambda^2\ell^2}{6}\cdot\dfrac{1-\cos\lambda\ell}{2(1-\cos\lambda\ell)-\lambda\ell\sin\lambda\ell}$
$d' = 2EI\varphi_4/\ell$ $b' = 3EI\varphi_6/\ell^3$	$N_i > 0$ (引張)	$\varphi_1 = \lambda\ell\sinh\lambda\ell / 2(\cosh\lambda\ell-1)$ $\varphi_2 = \dfrac{\lambda^2\ell^2}{6}\cdot\dfrac{1-\cosh\lambda\ell}{2(\cosh\lambda\ell-1)-\lambda\ell\sinh\lambda\ell}$
$c' = 3EI\varphi_7/\ell^2$ $d'' = 3EI\varphi_7/\ell$	$\varphi_3 = (3\varphi_2+\varphi_1)/4$, $\varphi_4 = (3\varphi_2-\varphi_1)/2$, $\varphi_5 = \varphi_1\cdot\varphi_2$ $\varphi_6 = 4\varphi_5 - 3\varphi_2^2/\varphi_3$, $\varphi_7 = \varphi_5/\varphi_3$, $\lambda = \sqrt{\lvert N\rvert/EI}$	
∵E＝弾性係数，A＝断面積，I＝断面2次モーメント，ℓ＝部材長		

2) 降伏端部材に対する stiffness matrix

線形解析における flow rule を考慮した場合の降伏端部材に対する stiffness matrix およびその誘導方法は文献1)のようであるが，本文の解析では stiffness matrix の各要素に非線形な要素が含まれるため，荷重強度P_iに対する解析にはそれに対応した基本式(stiffness matrix)を使用する必要があり，線形解析の場合とは多少異なった形となる。したがって以下に i,j 両端剛節部材の i 端が降伏した場合の基本式の誘導方法を紹介し，他の材端条件の場合については表－3に結果だけを示す。

いま，i 端降伏時の荷重強度をP_c，任意の荷重強度を$P_k(>P_c)$とし，これらに対応する stiffness matrix，材端力，節点 i,j の変位をそれぞれ($\mathbb{K}_{ic}, \mathbb{K}_{jc}, \mathbb{S}_{ic}, \delta_{ic}, \delta_{jc}$)，($\mathbb{K}_{ik}, \mathbb{K}_{jk}, \mathbb{S}_{ik}, \delta_{ik}, \delta_{jk}$)とすればこれらの間には式(5),(6)の関係がある。また，荷重強度の増加に伴なうこれらの増分を$d\mathbb{K}_i, d\mathbb{K}_j, d\mathbb{S}_i, d\delta_i, d\delta_j$とすれば式(7)が成立する。一方，降伏端 i における弾性変形量増分を$d\delta_i^e$，塑性変形量増分を$d\delta_i^p$とすれば，変形の連続条件より，式(8)が成立する。

$$\mathbb{S}_{ic} = \mathbb{K}_{ic}\cdot\delta_{ic} + \mathbb{K}_{jc}\cdot\delta_{jc} \qquad (5)$$

$$\mathbb{S}_{ik} = \mathbb{K}_{ik}\cdot\delta_{ik} + \mathbb{K}_{jk}\cdot\delta_{jk} \qquad (6)$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{K}_{ik} = \mathbb{K}_{ic} + d\mathbb{K}_i \ ,\ \mathbb{K}_{jk} = \mathbb{K}_{jc} + d\mathbb{K}_j \\ \mathbb{S}_{ik} = \mathbb{S}_{ic} + d\mathbb{S}_{ic} \\ \delta_{ik} = \delta_{ic} + d\delta_i \ ,\ \delta_{jk} = \delta_{jc} + d\delta_j \end{array}\right\} \qquad (7)$$

ただし，式(8)において，μ_i：塑性流れ定数（正のスカラー量），$\mathbb{N}_i$：$\mathbb{S}_{ic}$に対応する降伏曲線上の i 点における外向き法線ベクトル，f：曲げと軸力の組み合せを考えた場合の降伏条件式[1]，である。

$$d\delta_i = d\delta_i^e + d\delta_i^p = d\delta_i^e - \mu_i\mathbb{N}_i \qquad (8)$$

ここで

$$\mathbb{N}_i^t = [\partial f/\partial N, 0, \partial f/\partial M]_i = [\alpha_i, 0, \beta_i] \qquad (9)$$

表－3　降伏端部材に対する stiffness matrix $\mathbb{K}_i'$, $\mathbb{K}_j'$, および, 荷重項 ${}_p\mathbb{S}_i$

材端条件 \ $\mathbb{K}$	$\mathbb{K}_i'$	$\mathbb{K}_j'$	${}_p\mathbb{S}_{ic}$
i端降伏 j端剛節	$\begin{bmatrix} ad\beta_i^2 & -ac\alpha_i\beta_i & -ad\alpha_i\beta_i \\ -ac\alpha_i\beta_i & b\cdot T_i - c^2\beta_i^2 & ac\alpha_i^2 \\ -ad\alpha_i\beta_i & ac\alpha_i^2 & ad\alpha_i^2 \end{bmatrix}\cdot T_i^{-1}$	$\begin{bmatrix} -ad\beta_i^2 & ac\alpha_i\beta_i & -ad'\alpha_i\beta_i \\ ac\alpha_i\beta_i & -(b\cdot T_i - c^2\beta_i^2) & c(T_i - d'\beta_i^2) \\ ad\alpha_i\beta_i & -ac\alpha_i^2 & ad'\alpha_i^2 \end{bmatrix}\cdot T_i^{-1}$	$\begin{bmatrix} a\alpha_i^2 & 0 & a\alpha_i\beta_i \\ c\alpha_i\beta_i & 0 & c\beta_i^2 \\ d\alpha_i\beta_i & 0 & d\beta_i^2 \end{bmatrix}\cdot\dfrac{\mathbb{S}_{ic}}{T_i}$ $T_i = a\alpha_i^2 + d\beta_i^2$
i端剛節 j端降伏	$\begin{bmatrix} ad\beta_j^2 & ac\alpha_j\beta_j & ad'\alpha_j\beta_j \\ ac\alpha_j\beta_j & b\cdot T_j - c^2\beta_j^2 & c(T_j - d'\beta_j^2) \\ ad'\alpha_j\beta_j & c(T_j - d'\beta_j^2) & dT_j - d'^2\beta_j^2 \end{bmatrix}\cdot T_j^{-1}$	$\begin{bmatrix} -ad\beta_j^2 & -ac\alpha_j\beta_j & ad\alpha_j\beta_j \\ -ac\alpha_j\beta_j & -(b\cdot T_j - c^2\beta_j^2) & ac\alpha_j^2 \\ -ad'\alpha_j\beta_j & -c(T_j - d'\beta_j^2) & ad'\alpha_j^2 \end{bmatrix}\cdot T_j^{-1}$	$\begin{bmatrix} -a\alpha_j^2 & 0 & -a\alpha_j\beta_j \\ c\alpha_j\beta_j & 0 & c\beta_j^2 \\ d'\alpha_j\beta_j & 0 & d'\beta_j^2 \end{bmatrix}\cdot\dfrac{\mathbb{S}_{jc}}{T_j}$ $T_j = a\alpha_j^2 + d\beta_j^2$
i端降伏 j端滑節	$\begin{bmatrix} ad''\beta_i^2 & -ac'\alpha_i\beta_i & -ad''\alpha_i\beta_i \\ -ac'\alpha_i\beta_i & b'T_i - c'^2\beta_i^2 & ac'\alpha_i^2 \\ -ad''\alpha_i\beta_i & ac'\alpha_i^2 & ad''\alpha_i^2 \end{bmatrix}\cdot T_i^{-1}$	$\begin{bmatrix} -ad''\beta_i^2 & ac'\alpha_i\beta_i & 0 \\ ac'\alpha_i\beta_i & -(b'T_i - c'^2\beta_i^2) & 0 \\ ad''\alpha_i\beta_i & -ac'\alpha_i^2 & 0 \end{bmatrix}\cdot T_i^{-1}$	$\begin{bmatrix} a\alpha_i^2 & 0 & a\alpha_i\beta_i \\ c'\alpha_i\beta_i & 0 & c'\beta_i^2 \\ d''\alpha_i\beta_i & 0 & d''\beta_i^2 \end{bmatrix}\cdot\dfrac{\mathbb{S}_{ic}}{T_i}$ $T_i = a\alpha_i^2 + d''\beta_i^2$
i端滑節 j端降伏	$\begin{bmatrix} ad''\beta_j^2 & ac'\alpha_j\beta_j & 0 \\ ac'\alpha_j\beta_j & b'T_j - c'^2\beta_j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot T_j^{-1}$	$\begin{bmatrix} -ad''\beta_j^2 & -ac'\alpha_j\beta_j & ad''\alpha_j\beta_j \\ -ac'\alpha_j\beta_j & -(b'T_j - c'^2\beta_j^2) & ac'\alpha_j^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot T_j^{-1}$	$\begin{bmatrix} -a\alpha_j^2 & 0 & -a\alpha_j\beta_j \\ c'\alpha_j\beta_j & 0 & c'\beta_j^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\dfrac{\mathbb{S}_{jc}}{T_j}$ $T_j = a\alpha_j^2 + d''\beta_j^2$
i j 両端降伏部材	$\mathbb{K}_i' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\cdot R^{-1}$ $\mathbb{K}_j' = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & a_{13}' \\ -a_{12} & -a_{22} & a_{23}' \\ -a_{13} & -a_{23} & a_{33}' \end{bmatrix}\cdot R^{-1}$ $a_{11} = a(d^2-d'^2)\beta_i^2\beta_j^2$ $a_{12} = -ac(d-d')\beta_i\beta_j(\alpha_i\beta_j-\alpha_j\beta_i)$ $a_{13} = -a(d^2-d'^2)\alpha_i\beta_i\beta_j^2$ $a_{22} = a(bd-c^2)(\alpha_i^2\beta_j^2+\alpha_j^2\beta_i^2) + \{b(d^2-d'^2)-2c^2(d-d')\}\beta_i^2\beta_j^2 + 2a(bd'-c^2)\alpha_i\alpha_j\beta_i\beta_j$ $a_{23} = ac(d-d')\alpha_i\beta_j(\alpha_i\beta_j-\alpha_j\beta_i)$ $a_{33} = a(d^2-d'^2)\alpha_i^2\beta_j^2$ $a_{13}' = a(d^2-d'^2)\alpha_j\beta_i^2\beta_j$ $a_{23}' = -ac(d-d')\alpha_j\beta_i(\alpha_i\beta_j-\alpha_j\beta_i)$ $a_{33}' = -a(d^2-d'^2)\alpha_i\alpha_j\beta_i\beta_j$ $R = (d^2-d'^2)\beta_i^2\beta_j^2 + ad(\alpha_i^2\beta_j^2+\alpha_j^2\beta_i^2) + 2ad'\alpha_i\alpha_j\beta_i\beta_j$		$\left\{f_4\begin{bmatrix} a\alpha_i^2 & 0 & a\alpha_i\beta_i \\ c\alpha_i\beta_i & 0 & c\beta_i^2 \\ d\alpha_i\beta_i & 0 & d\beta_i^2 \end{bmatrix} - f_3\begin{bmatrix} -a\alpha_i\alpha_j & 0 & -a\alpha_j\beta_i \\ c\alpha_i\beta_j & 0 & c\beta_i\beta_j \\ d'\alpha_i\beta_j & 0 & d'\beta_i\beta_j \end{bmatrix}\right\}\times\dfrac{\mathbb{S}_{ic}}{R}$ $+\left\{f_1\begin{bmatrix} -a\alpha_j^2 & 0 & -a\alpha_j\beta_j \\ c\alpha_j\beta_j & 0 & c\beta_j^2 \\ d'\alpha_j\beta_j & 0 & d'\beta_j^2 \end{bmatrix} - f_2\begin{bmatrix} a\alpha_i\alpha_j & 0 & a\alpha_i\beta_j \\ c\beta_i\alpha_j & 0 & c\beta_i\beta_j \\ d\beta_i\alpha_j & 0 & d\beta_i\beta_j \end{bmatrix}\right\}\times\dfrac{\mathbb{S}_{jc}}{R}$ ここで， $f_1 = a\alpha_i^2 + d\beta_i^2$,　$f_4 = a\alpha_j^2 + d\beta_j^2$ $f_2 = f_3 = -a\alpha_i\alpha_j + d'\beta_i\beta_j$

式(6)に式(7),(8)を代入し整理すれば材端力の増分$d\mathbb{S}_i$が式(10)のように求まり，この$d\mathbb{S}_i$を直交条件式，$\mathbb{N}_i^t \cdot d\mathbb{S}_i = \overset{1)}{0}$，に代入すれば，未知量$\mu_i$が式(11)のように得られる。したがって，この$\mu_i$を式(10)に代入し整理すればこの場合の材端力と節点変位の関係を表わす基本式が式(13)のように求められる。なお，この場合の$\mathbb{K}_i$, $\mathbb{K}_j$は両端剛節部材に対するstiffness matrix(表-1)であり，表-3の値は式(14)に個々の値を代入して整理した結果である。また，式(11)のμ_iは定義より正のスカラー量であるから，$\mu_i<0$となるときには弾性復活がおこる。

$$d\mathbb{S}_i=\mathbb{K}_{ik}\cdot\delta_{ik}+\mathbb{K}_{jk}\cdot\delta_{jk}-\mathbb{K}_{ik}\cdot\mu_i\cdot\mathbb{N}_i-\mathbb{S}_{ic} \qquad (10)$$

$$\mu_i=(\mathbb{N}_i^t\cdot\mathbb{K}_{ik}\cdot\delta_{ik}+\mathbb{N}_i^t\cdot\mathbb{K}_{jk}\cdot\delta_{jk}-\mathbb{N}_i^t\cdot\mathbb{S}_{ic})/T_i \qquad (11)$$

ここで

$$T_i=\mathbb{N}_i^t\cdot\mathbb{K}_{ik}\cdot\mathbb{N}_i=a\alpha_i^2+d\beta_i^2 \qquad (12)$$

$$\mathbb{S}_{ik}=\mathbb{K}'_{ik}\cdot\delta_{ik}+\mathbb{K}'_{jk}\cdot\delta_{jk}+{}_p\mathbb{S}_{ic} \qquad (13)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{K}'_{ik}&=\mathbb{K}_{ik}-\mathbb{K}_{ik}\cdot\mathbb{N}_i\cdot\mathbb{N}_i^t\cdot\mathbb{K}_{ik}/T_i\\ \mathbb{K}'_{jk}&=\mathbb{K}_{jk}-\mathbb{K}_{ik}\cdot\mathbb{N}_i\cdot\mathbb{N}_i^t\cdot\mathbb{K}_{jk}/T_i\\ {}_p\mathbb{S}_{ic}&=\mathbb{K}_{ik}\cdot\mathbb{N}_i\cdot\mathbb{N}_i^t\cdot\mathbb{S}_{ic}/T_i\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

5. ベクトル移動

本文の場合も，文献1)の場合と同様に降伏断面における応力とひずみとの非線形関係を線形な関係に置き換えるための，線形近似の手法を採用しているため，降伏条件式が2次式の場合には，降伏断面の材端力ベクトルを，荷重強度を増加する以前に，移動しておく必要があるがその手順は文献1)の場合とまったく同様である。

6. 解析プログラム

筆者らは電子計算機FACOM-230-60(京大大型計算機センター内)を対象にして，2.で述べたような解析手順にしたがい，初期のinput dataを与えるだけで計算機が自動的に漸増節点荷重をうける任意の平面棒構造物の崩壊過程を追跡し，必要な演算結果をoutputするような解析プログラムを作成しているがこれについての説明は紙面の都合上省略し，計算機の行なう演算の流れだけを図-4に紹介しておく。なお，解析例については目下計算中であり，2ヒンジアーチとかローゼ桁に対する2,3の解析例を講演会当日報告する予定である。

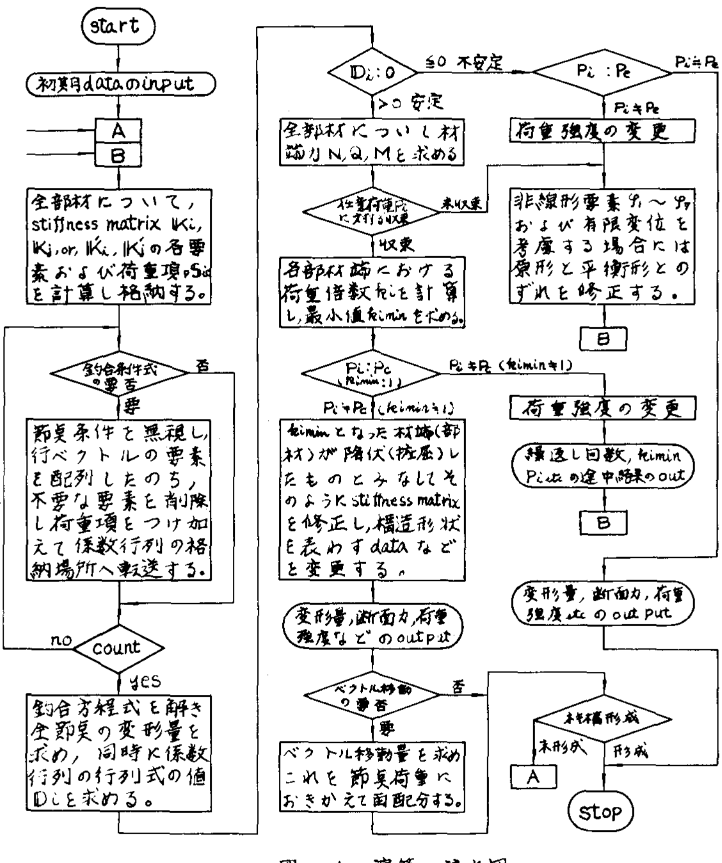


図-4 演算の流れ図

7. 参考文献 1)星 児嶋 平尾：「軸力の影響を考慮した平面剛滑節構造物の一自動弾塑性解析」，土木学会論文報告集第202号，1972，6月。 2)星 児嶋 平尾：「平面構造物の安定性に対する一解析法」，徳島大学工学部研究報告第15号(1970)。 3)星 児嶋 平尾：「高次不静定構造物の耐荷能力について」，第26回年次学術講演会講演集第I部 P.127～130，(1971，10)。