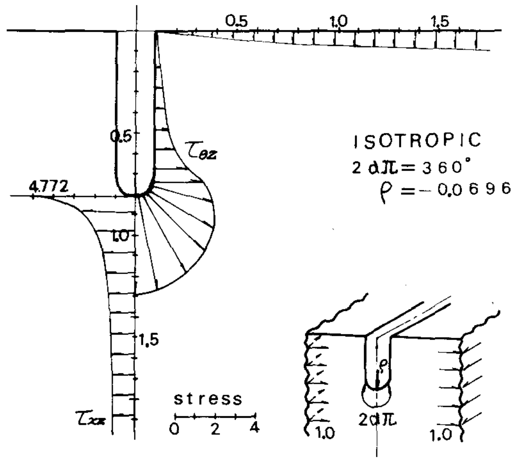
I-56　切欠きを有する弾性体の縦せん断応力

名古屋工業大学　正員　長谷部 宣男

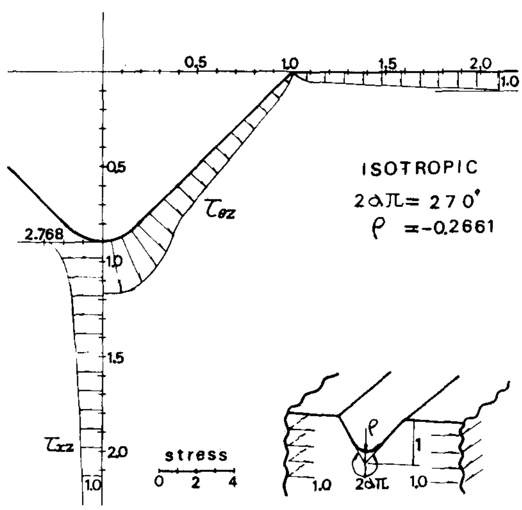
まえがき

切欠きを有する弾性体に縦せん断荷重の作用する問題は，破壊力学におけるき裂のModeの1つ（Tearing）であり，その弾性応力分布に関する知見は，基礎的な問題として必要と思われる。[1)]

その解析は，数学的にはねじりの問題の特別な場合として得られる。ここでは文献-2)で用いた写像関数を使って，2，3の荷重の場合の切欠き付近のせん断応力分布を求めたものである。



図－1



図－2

解法

零でない唯一の変位成分および応力成分は

$$w = w(x,y),\quad \tau_{xz} = G\,\partial w/\partial x,\quad \tau_{yz} = G\,\partial w/\partial y \qquad (1)$$

で，Gはせん断弾性係数である。

今応力関数$\phi(z)$（$z = x + iy$）と単位円への写像関数$z = \omega(\zeta)$を導入し，$\phi(z) = \phi\{\omega(\zeta)\} = \Phi(\zeta)$とおくと，応力成分，変位成分および境界条件式は，次のように表わされる。

- $\tau_{xz} - i\tau_{yz} = G\phi'(z) = G\Phi'(\zeta)/\omega'(\zeta) \qquad (2)$
- $w = [\phi(z) + \overline{\phi(z)}]/2 = [\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}]/2$
- $G\{\phi(z) - \overline{\phi(z)}\} = G\{\Phi(\sigma) - \overline{\Phi(\sigma)}\} = \qquad (3)$
  $= 2i\int\{\tau_{xz}\cos(n,x) + \tau_{yz}\cos(n,y)\}ds +$ 定数

ここにσは単位円周上のζ，(x,n)はx軸と境界の法線の為す角である。

また曲線座標の応力成分に変換するには

$$\tau_{rz} - i\tau_{\theta z} = \zeta\omega'(\zeta)/|\zeta\omega'(\zeta)| \cdot [\tau_{xz} - i\tau_{yz}] \qquad (4)$$

を用いればよい。

計算例

文献-2)に用いた $z = \omega(\zeta) = E/(1-\zeta) + \sum E_k/(\zeta_k - \zeta)$ の形の写像関数を用いて，一様なせん断荷重や集中荷重の作用した場合の応力分布を求める。

(a) 一様縦せん断荷重

この場合の求めたい応力関数を，$\Phi(\zeta) = \phi_1(\zeta) + \phi_2(\zeta)$とする。ここで$\phi_2(\zeta)$は，無限遠での一様なせん断応力状態を決める応力関数で $\phi_2(\zeta) = \tau\omega(\zeta)/G$ である。τは縦せん断荷重の大きさである

。$\Phi_1(\zeta)$は，無限遠での応力が0になる応力関数で，次のようにして決められる。

今境界上に外力は作用していないから，境界条件式（３）と$\Phi_2(\zeta)$とから

$$G\{\phi_1(\sigma)-\overline{\phi_1(\sigma)}\} = -\tau\{\omega(\sigma)-\overline{\omega(\sigma)}\} + \text{定数}$$

上式両辺に $1/2\pi i \cdot d\sigma/\sigma-\zeta$ を乗じ，単位円周上で積分すると

$$G\phi_1(\zeta) = -\tau\{\omega(\zeta)+(\bar{E}-E)/2(1-\zeta)\}$$

を得る。ここで定数項は省略した。

応力成分は，式（２）より

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = -\tau(\bar{E}-E)/2(1-\zeta)^2 \cdot 1/\omega'(\zeta)$$

となる。

図-1には，開き角$2\alpha\pi=360°$，隅角部の最小曲率半径$\rho=-0.0696$，切欠き深さ0.8117の場合の，図-2には$2\alpha\pi=270°$，$\rho=-0.2661$，切欠き深さ0.8917の場合の応力分布を示す。

（b）集中荷重

図-3，4には，向き反対の一対の集中荷重P=1.0のときの応力分布を3通りの荷重の位置に対して示す。この場合の応力関数は，境界条件式

$$G\{\Phi(\sigma)-\overline{\Phi(\sigma)}\} = 0 \quad (\sigma_2\sim\sigma_0\sim\sigma_1)$$
$$= -P \quad (\sigma_1\sim\sigma_3\sim\sigma_2)$$

より，$1/2\pi i \cdot d\sigma/\sigma-\zeta$を乗じ単位円周上で積分すると

$$G\Phi(\zeta) = P/\pi \cdot \log\{(\sigma_2-\zeta)/(\sigma_1-\zeta)\}$$

と求められる。ここに$\sigma_0=1$，$\sigma_3=-1$，σ_1，σ_2は載荷点を表わす単位円周上の点である。

図-5には，単一の集中荷重P=1.0の応力分布を示す。この場合の応力関数は，

$$G\Phi(\zeta) = P/\pi \log\{(\sigma_1-\zeta)/(\sigma_0-\zeta)\}$$

となる。この場合の切欠きの形状は，深さ1.0を基準にしているが，寸法を0.8117倍，応力の大きさを1/0.8117倍すれば，図-3と同じ形状の弾性体および荷重の位置のものになる。

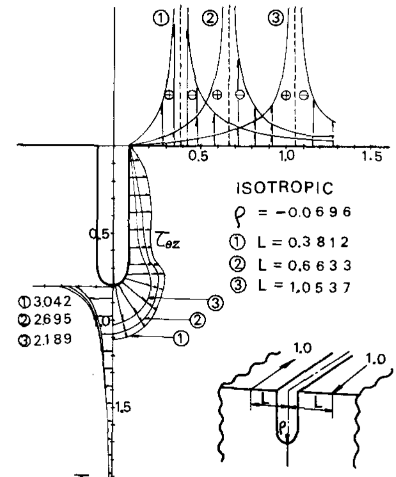


図-3

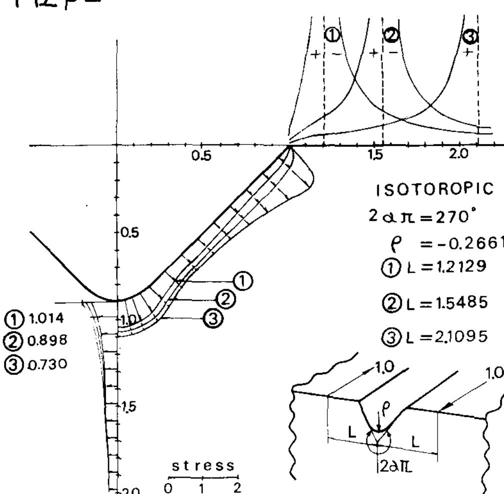


図-4

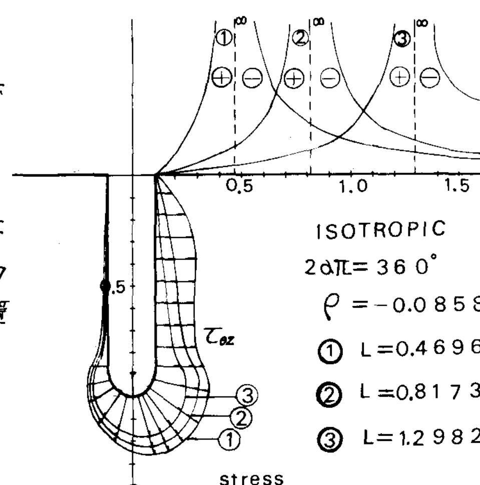


図-5

文献

1) Horold Liebowitz : "Fracture" Vol. 2. Chap. 2. Academic Press 1968

2) 長谷部：土木学会論文報告集 第194号 1971