

1. まえがき

キャストレーテッド・ビームのまたる利点は、はりせいが増大することにより同一重量のH形鋼よりと比較して曲げ剛性が著しく高められること、および孔が配管ダクトの貫通孔として利用できることである。しかし、孔の存在により応力集中が発生すること、せん断剛性が低下することが重大な欠点としてあげられる。したがって、キャストレーテッド・ビームの製作にさいしては、孔の大きさおよび形状をどのようにとらばこれらの欠点を小さく抑えようかが問題となる。本研究は、キャストレーテッド・ビームの応力を二次元弾性理論により求め、最適の孔の大きさおよび形状について検討を行なうものである。荷重条件は純曲げおよび一様引張とし (Fig. 1), 解法には複素変数と送点法の併用法¹⁾を用いる。

2. 構造単位と写像関数

Fig. 2 に示すごとく、1/4の孔を含み孔内中心を通る断面ではきまれる部分を構造単位と名付ければ、キャストレーテッド・ビームは二から構造単位の連続体と考えることができる。純曲げおよび一様引張の場合には、解析は1構造単位を対象とすればよく、さらにその4分の1領域(第1象限^{のみ})を考へればよい。

任意の六角形孔をもつ構造単位において、孔の外部領域を単位円の外部へ等角写像する関数を次式で表わす。

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \sum_{n=1,3,5}^N a_n \zeta^{-n}\right) \quad (1)$$

ここに、 $z = x + iy$, $\zeta = \rho \cdot \exp(i\theta)$, a_n は $\rho = 1$ のとき式(1)が孔縁を表わすごとく決定される実数係数で、 R は孔の大きさを与える定数である。

係数 a_n は、筆者提案の送点最小自乗法による写像法²⁾を用いて $N=11$ とし求められ、きわめて高精度の写像図形が之とされている。その例を Fig. 3 に示す。

3. 応力関数および境界条件

応力関数は、一般に次式のごとくべき級数の展開形で仮定される。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \varphi_0(\zeta) + \varphi_1(\zeta) \\ \psi(\zeta) &= \psi_0(\zeta) + \psi_1(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(\zeta) &= \sum_{k=0}^k R_k \zeta^k, & \varphi_1(\zeta) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{-k} \\ \psi_0(\zeta) &= \sum_{k=0}^k C_k \zeta^k, & \psi_1(\zeta) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta^{-k} \end{aligned} \right\} \quad (2b)$$

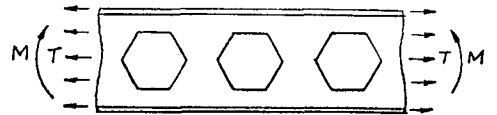


Fig.1 Castellated beam

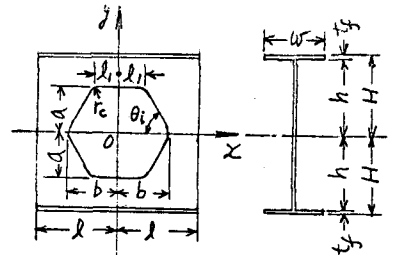


Fig.2 Structural unit

式(2b)において, B_k, b_k, C_k および C_k は, 孔縁, ウエブ-フランジ接合部および隣接構造単位との接合部における境界条件より決定される複素数係数である。

孔縁は応力自由として, その境界条件式より係数 b_k および関数 $\psi(\zeta)$ と他の係数 B_k, C_k との関係がつきのごとく等かゝる。

$$b_k = \begin{cases} f_k - \bar{f}_k - \bar{C}_k, & k=1, 2, \dots, 9 \\ -\bar{f}_k - \bar{C}_k, & k=10, 11, \dots, K \\ -\bar{f}_k, & k=k+1, k+2, \dots, k+10 \\ 0, & k \geq k+11 \end{cases} \quad (3)$$

$$\psi(\zeta) = \sum_{p=0}^{k+10} \bar{f}_p \zeta^p - \sum_{p=0}^9 \bar{f}_p \zeta^p - \sum_{k=1}^K \bar{B}_k \zeta^{-k} - \frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\omega(\zeta)} \psi'(\zeta) \quad (4)$$

式(3), (4)において, 係数 \bar{f}_k および f_k は, 次式より与えられる B_k, b_k の関数として求められる。

$$F_k = \sum_{l=1}^K r e_{10+l-k} \bar{B}_l \quad (5)$$

$$f_k = \sum_{l=1}^{10-k} r e_{10-l-k} \bar{b}_l \quad (6)$$

さらに, 式(5), (6)の係数 e_{10+l-k} または e_{10-l-k} は, 写像関数の係数 a_n を用いて次式より算定される。

$$a_{l+q} = e_q - \sum_{j=1}^{q-1} j \bar{a}_j e_{q-j-1} \quad (7)$$

Fig. 1に示すごとく, 純曲げまたは一様引張が作用する場合には, 応力関数は荷重および構造の対称性より次式のごとく表わされる。

曲げに対して

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \sum_{k=2,4,6} i B_k'' \zeta^k + \sum_{k=2,4,6} i b_k'' \zeta^{-k} \\ \psi(\zeta) &= \sum_{k=2,4,6} i C_k'' \zeta^k + \psi_1(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

引張に対して

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \sum_{k=1,3,5} B_k' \zeta^k + \sum_{k=1,3,5} b_k' \zeta^{-k} \\ \psi(\zeta) &= \sum_{k=1,3,5} C_k' \zeta^k + \psi_1(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (8b)$$

ここに, B_k', b_k', C_k'' ; B_k'', b_k'', C_k' : いずれも実数

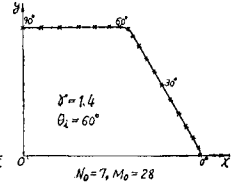
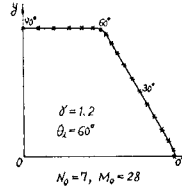
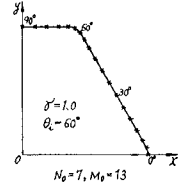
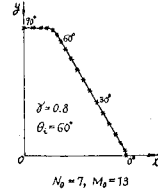
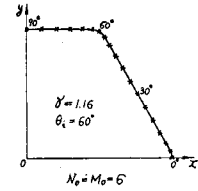


Fig. 3 Mapped figures

かくして、未定係数は B_k, C_k のみとなり、これらは残りの条件、すなわちウエブ-フランジ接合部および隣接構造単位との接合部における条件より決定される。

これら境界条件は、純曲げおよび一様引張に対してそれぞれ次の式のごとく書かれる。

曲げに対して

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \text{ において} \quad u_x = -y/h \cdot u_0, \quad \tau_{xy} = 0 \\ y=h \text{ において} \quad \sigma_y - \frac{A_f}{t_w} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad \tau_{xy} - \frac{A_f}{t_w} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \end{array} \right\} \quad (9a)$$

引張に対して

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \text{ において} \quad u_x = u_0, \quad \tau_{xy} = 0 \\ y=h \text{ において} \quad \sigma_y - \frac{A_f}{t_w} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad \tau_{xy} - \frac{A_f}{t_w} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \end{array} \right\} \quad (9b)$$

一方、式(3)、(4)の関係をを用いて式(2)の応力度数を Kolosoff-Muskhelishvili の公式に適用することにより、応力 σ_y, τ_{xy} および変位 u_x などが未定係数 B_k, C_k を含む形で求められる。これらと式(9)の境界条件式に代入すれば、 B_k および C_k に関する連立方程式がえられるが、この連立方程式を直接解くことは困難であるゆえ、ここでは逆点法を用いる。すなわち、Fig. 4 に示すごとく、 $x=0$ 上に M_1 ID、 $y=h$ 上に M_2 ID の逆点 E とし、各点において 2ID、計 $2(M_1+M_2)$ ID の条件式がえられる。これに対して未定係数 B_k および C_k をそれぞれ (M_1+M_2) ID とし、条件式は B_k, C_k に関する $2(M_1+M_2)$ 元の線形連立方程式となり、これを解くことにより未定係数がすべて決定されることとなる。

式(9)のごとく境界条件が混合型で与えられ、さらに応力境界値が 0 である場合には、上記連立方程式を解いて直接えられる応力、変位は、真の値を表わしていない。そこで換算の必要があるが、これはつぎのように行えばよい。連立方程式を解いて直接えられる応力、変位を添字 * を付けて表わすとする。

純曲げの場合、 $x=0$ 上にとった M_3 ID の点の応力 σ_x^* を数値積分すれば、 $x=0$ 上の真の応力 σ_x の総和が $-Mh^2/2I$ (I : solid section における上の断面二次モーメント) に等しいことから次式をうる。

$$\int_0^h \sigma_x dy = F_c \cdot h \sum_{j=1}^{M_3} f_j (\sigma_x^*)_j = -\frac{Mh^2}{2I} \quad (10a)$$

ここに f_j : 重み, F_c : 換算係数

また、一様引張の場合には、 $x=0$ 上の真の応力 σ_x の総和は hT に等しい。(したがって、次式をうる。

$$\int_0^h \sigma_x dy = F_c \cdot h \sum_{j=1}^{M_3} f_j (\sigma_x^*)_j = hT \quad (10b)$$

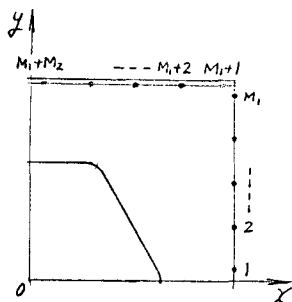


Fig. 4

式(10)より換算係数 F_c が決定され、真の応力および変位は次式で求められることとなる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= F_c \cdot \sigma_x^*, & \sigma_y &= F_c \cdot \sigma_y^*, & \tau_{xy} &= F_c \cdot \tau_{xy}^* \\ u_x &= F_c \cdot u_x^*, & u_y &= F_c \cdot u_y^* \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

他の座標に関する応力、変位も同様である。

4. 計算例

孔の大きさおよび形状を支配する要素として、つぎの諸量および記号を定義する (Fig. 2 参照)。

拡張比: $\alpha = H/H_0$ (H_0 : 原材の1/2けた高)

孔径比: $\mu = a/h$, 形状比: $\gamma = b/a$

隅半径比: $\zeta = r_c/2a$, 傾斜角: θ_i

拡張比は, $H_0 = h_0 + t_0 \div h_0$, $H = h + t_0 \div h$ なることより,

$\alpha = h/h_0$ とも表わされる。このとき、拡張比と孔径比とはつぎの関係にある。

$$\alpha = \frac{2}{2-\mu} \quad (12)$$

純曲げの場合について、孔縁応力の分布例を Fig. 5 に示す (ただし、フランジを無視し、隣接構造単位との接合部における条件を $\sigma_x = -M/I$ 、 $\tau_{xy} = 0$ の応力型としている)。基準応力は Mh/I である。応力集中は、純曲げのとき常に隅角部の平行辺寄りの位置に生ずる。平行辺上の応力は、隅角部辺端を除いてほぼ $-Mh/I$ に等しく、傾斜辺においては小さな引張応力が生じている。

フランジも考慮し、隣接構造単位との接合部における条件を混合型とした数値計算については講義当日発表する。

5. おまじ

本報では、曲げおよび引張をうけるキャストレーテッド・ビームについて、二次元弾性論的見地より理論解法を提示した。解法は、任意の六角形孔について述べたが、別種キャストレーテッド・ビームに見られる八角形孔に対しても同様に展開できる。

参考文献

- 1) 後藤 恵之輔: 複素変数法と迷点法の併用による有孔板の応力解析 (I), 九大工学集報, 45-1 (Jan. 1972) pp. 6-9.
- 2) Gotoh K.: A Numerical Method for Determining the Mapping Functions for Some Simply Connected Regions, Proc. 21th Japan Nat. Congr. Appl. Mech. (Nov. 1972 出版予定).

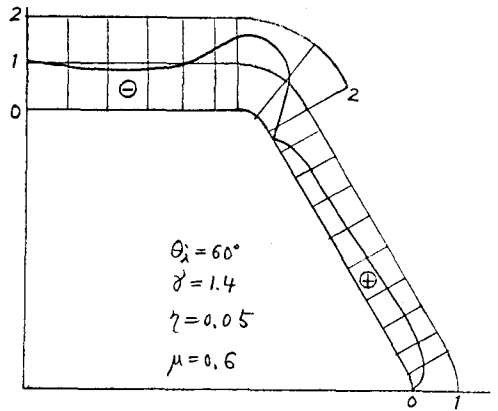
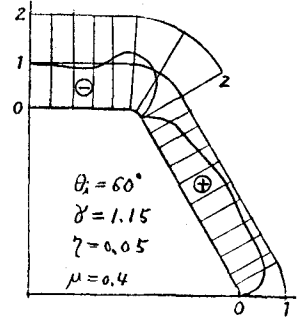


Fig. 5 Stress distribution around a hexagonal hole