

大阪工業大学

正員 ○岡村宏一

東洋技研コンサルタントKK

正員 島田 功

1. まえがき; 3次元弾塑性非軸対称問題を高精度,かつ実用的に解析できると思われる1つの解法について報告する。

筆者はすでに,板,あるいはシャイベの弾塑性問題を高精度で解析できる1つの解法を発表した。¹⁾

この解法では,非線形の基礎式の取扱に関して,塑性変形に対応する物理量は,板内点を囲む比較的小さい有限領域で平均値を持つものとみなし,変形,応力を十分な精度を持つ連続解で与える線形化の手法を用いた。一方,3次元弾性問題の解析に有効な方法として,Mindlinの才1,才2問題の解を,水平,垂直,および斜め方向の有限な長方形面に積分したものを基本解とし,それらの組み合わせによって,半無限弾性体内に任意の調整面,ならびに調整力の分布を与え,任意の境界面を作り出すことのできる1つの実用解法を発表した。²⁾ 本文は,これらの解法をさらに拡張して組み合わせた3次元弾塑性非軸対称問題の解析に有用と思われる1つの数值解法と,その応用例について述べる。なお,その一部は,文献3)で発表した,その後得られたデータを加えて報告する。

2. 解法; 解法上の仮定として,材料は等方性,かつ弾完全塑性体とし,応力とひずみの関係は,Plandtile-Reussの方程式に支配されるものとする。

さて,3次元体の微小エレメントについて,応力成分を $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ とし,変位,および,ひずみのそれらを u, v, w ならびに $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ とすれば,全ひずみの変化速度 $\{\dot{\epsilon}\}$ は,弾性,および塑性成分, $\{\dot{\epsilon}_e\}, \{\dot{\epsilon}_p\}$ からなるものとし,それをつぎのように書き表わす。

$$\{\dot{\epsilon}\} = \{\dot{\epsilon}_e\} + \{\dot{\epsilon}_p\} = [D]^{-1} \cdot \{\dot{\sigma}\} + \{\dot{\epsilon}_p\} \text{----- (1)}$$

式中, $[D]$ は弾性マトリックス, また,以下の諸式で G はせん断弾性係数, $\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ E ; ヤング係数, ν ; ポアソン比とする。いま,降伏条件を塑性ポテンシャル f とすれば, $\{\dot{\epsilon}_p\}$ は, flow rule により,

$$\{\dot{\epsilon}_p\} = \mu \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \text{----- (2)}$$

μ; 塑性変形中変化あるスカラー量

したがって $\{\dot{\epsilon}\} = [D]^{-1} \cdot \{\dot{\sigma}\} + \mu \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \text{----- (3)}$

ここで,微小エレメントに関する周知の釣合式を時間微分したのち,それらに,(3)より得られる応力成分の変化速度を代入し,さらに,0からtまでの時間積分を行えば,結局,釣合方程式はつぎ

- 1) 岡村, 吉田; 大たわみ, およびリブの補剛を考慮した長方形鋼板の弾塑性解析, 土木学会論文報告集, No 196, 1971
- 2) 岡村, 島田; 3次元弾性問題の一数值解法とその応用, 同, No 199, 1972,
- 3) 岡村, 島田; 3次元弾塑性非軸対称問題の一数值解法, 土木学会関西支部 (47.5)

のように書かれる。

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \right) + G \nabla^2 u &= - \int_0^t X(x, y, z) dt \\ (\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) + G \nabla^2 v &= - \int_0^t Y(x, y, z) dt \\ (\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + G \nabla^2 w &= - \int_0^t Z(x, y, z) dt \end{aligned} \right\} \text{----- (4)}$$

式(4)の右辺、すなわち、時間に関する積分項は、釣合方程式の性格から、Body Forceと同様の意味を持つ物理量であることがわかる。また、それぞれの被積分関数は、塑性変形中の体積変化が0であることを考慮して、以下のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} X(x, y, z) &= -G \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \tau_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \right) \right\} \\ Y(x, y, z) &= -G \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \right) \right\} \\ Z(x, y, z) &= -G \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \text{----- (5)}$$

ところで、本文では、降伏条件として Von Mises Typeのものを用いた。すなわち、

$$f = \frac{1}{2\sigma_p^2} \{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \} = 1 \text{----- (6)}$$

σ_p: 降伏応力

したがって、式(4)の時間積分を荷重段階 *j* の和に置換すれば、

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= \int_0^t X(x, y, z) dt = - \frac{2G}{\sigma_p^2} \sum_j \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) \right\} + 3 \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (\mu \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu \tau_{xz}) \right\} \right\}_j \\ \bar{Y} &= \int_0^t Y(x, y, z) dt = - \frac{2G}{\sigma_p^2} \sum_j \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu (2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z) \right\} + 3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\mu \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu \tau_{yz}) \right\} \right\}_j \\ \bar{Z} &= \int_0^t Z(x, y, z) dt = - \frac{2G}{\sigma_p^2} \sum_j \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu (2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) \right\} + 3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\mu \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu \tau_{yz}) \right\} \right\}_j \end{aligned} \right\} \text{----- (7)}$$

前述のように、これら塑性変形に従属する物理量、 \bar{X} 、 \bar{Y} 、 \bar{Z} はBody Forceと同じ性格を持つ。ここで、前論文¹⁾で示した解法と同様な思想にもとづく手法を導入する。すなわち、弾性体内の塑性化した点(*i*)を包む比較的小さい有限な容積(図-2の $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$)では、これらの物理量は、平均値を持つものとみなす。そうすれば、このような有限な容積内で均一な密度分布を持つ単位のBody Force($\bar{X}_i = \bar{Y}_i = \bar{Z}_i = 1$)による弾性体内の任意点の応力、あるいは、変位は、図-1に示すようなMindlin σ_1 、および σ_2 問題の解を、この容積に関して重積分することによって得られる。この種の積分を遂行するにあたって、本文では、すでに前論文²⁾に示したように、長方形面に対しては厳密な重積分を行ない、これに直角な方向の積分は和分による方法を用いた。以上により、*i*点が塑性化した場合、この点における \bar{X}_i 、 \bar{Y}_i 、 \bar{Z}_i の諸量を定めることができ、*i*点の塑性変形が弾性体内の任意点の応力、および変位に及ぼす影響値を求めることができる。ところで、これら \bar{X} 、 \bar{Y} 、 \bar{Z} は、式(7)に示されるように、未定係数 μ 、およびその時点での応力の1次微分を陰関数として含んでいる。さて、 \bar{X} 、 \bar{Y} 、 \bar{Z} を線形化するため、前論文¹⁾で示したように、部分的に差分法が用いられる。すなわち、塑性化した*i*点、ならびに周囲の*b*点について、図-3に示すネッ

トを考へ、逐次計算のある過程でこゝから各点の応力の近似値が与えられたとすれば、 $\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i$ はこの時点における各点の μ の1次関数として次のように表わされる。(もちろん、弾性域にある点では、 $\mu=0$ である。)

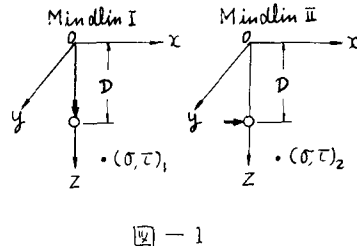


図-1

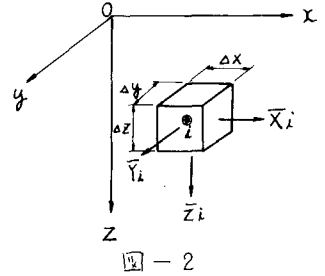


図-2

$$\begin{aligned}
 (\bar{X}_i)_j = & -\frac{G}{\sigma_p} \left[\frac{1}{\Delta x} \{ \mu_{i(0,0)} (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)_{i(1,0)} - \mu_{i(1,0)} (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)_{i(0,0)} \} \right. \\
 & + \frac{3}{\Delta y} \{ \mu_{i(0,1)} (\tau_{xy})_{i(0,1)} - \mu_{i(0,1)} (\tau_{xy})_{i(0,1)} \} \\
 & \left. + \frac{3}{\Delta z} \{ \mu_{i(1,1)} (\tau_{xz})_{i(1,1)} - \mu_{i(1,1)} (\tau_{xz})_{i(1,1)} \} \right]_j \quad \text{----- (8)}
 \end{aligned}$$

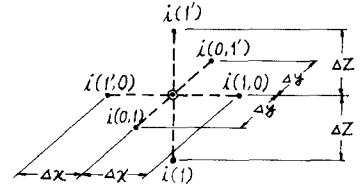


図-3

$(\bar{Y}_i)_j, (\bar{Z}_i)_j$ も同様に求めるが、紙面の都合で省略する。このようにして塑性変形による応力、あるいは変形は μ を1次で含んだ連続解の形となる。さらに、外荷重による応力、あるいは変位として Bousinesq, Cerruti の解を積分したものを線形結合させる。各時点で、塑性化した各点における μ が降伏条件〔式(6)〕を満足するように繰返し計算によって定め、同時に各点の応力が収束すれば、問題は

解決する。

なお、3次元体内に境界面を持つ場合は、すでに、前論文²⁾で述べたような調整力の分布を与え境界条件を

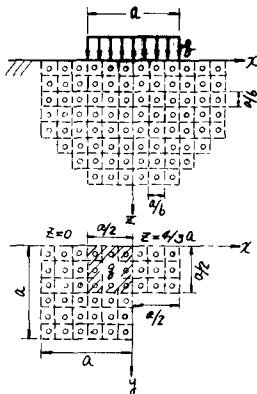


図-4

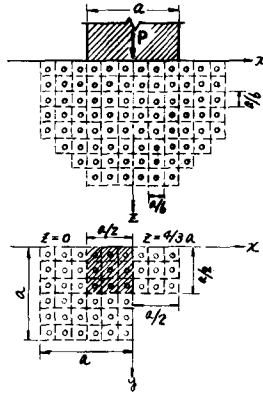


図-5

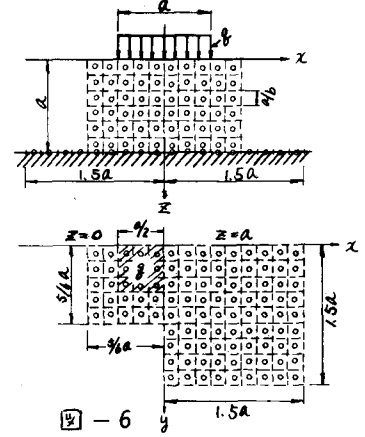


図-6

同時に満足するようにこれらを定めればよい。逐次計算の操作については紙面の都合で省略する。〔文献(3)参照〕

3. 計算例;

3種類の計算例を提示する。計算に用いた諸定数は鋼材のものである。

- 1) 表面に正方形等分布荷重を受ける半無限体の問題
- 2) 表面を正方形剛板で加圧される半無限体の問題

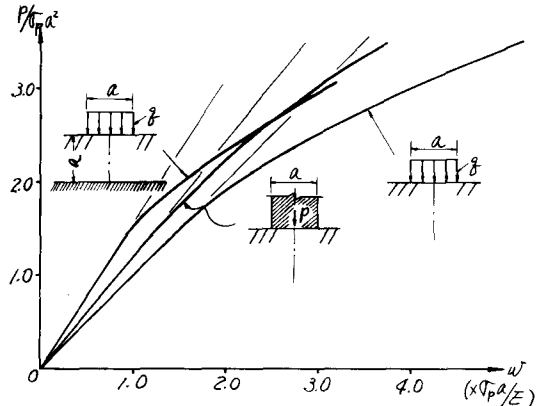


図-7

3) 剛な半無限体上の有限厚を持つ層が表面に正方形算分布荷重を受ける問題

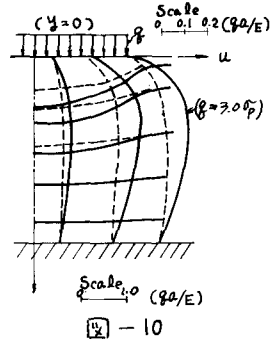
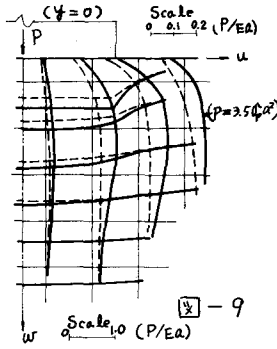
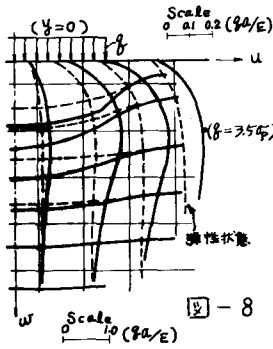
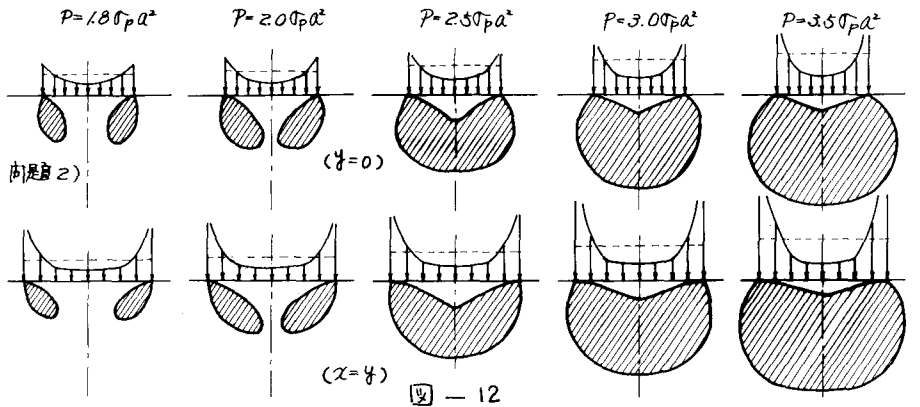
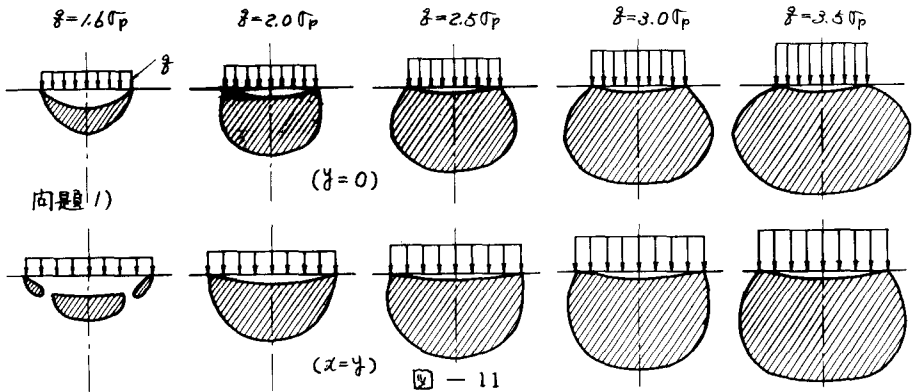


図-4~6は、これから各Case

の解析における有限領域の設定の模様を示す。

図-7は加圧面中心点の変位である。変位の勾配はかたより減少するが大きな流動は生じていない。

これは、図-11~13に見るように非左縮性に近くなっている塑性域を外例



$P=1.2\sigma_p a^2$

の弾性域が包み込んでいるためであろう。また図に見るように向問題1),3)と2)では荷重面直下の塑性域の様相を異に有る。

