

大阪工業大学

正員 岡村宏一

東洋技研コンサルタントKK

正員 O島田 功

1. まえがき; 部分的に補剛された3次元弾性体の実用解法を用発することは、鉄骨で補剛されたコンクリート構造、あるいは地盤内の杭とか、埋設物などの多くの問題の3次元解析を行なう上で有用であろう。しかしながら、このような部分的な剛性変化を持つ3次元体の問題を、異用性体のような平均化したモデルで扱うことには、仮定の上で問題があるように思われる。

筆者は、本学会に提出した別文¹⁾において、3次元弾塑性非軸対称問題を扱う1つの数值解法を提案した。ところで、この問題を3次元弾性体内における部分的弱化的問題とみなすならば、標記の問題は、同様に、部分的強化の問題としてとらえることができるであろう。もちろん、3次元体内に配置される補剛材の形状は多様であり、この形状に対応する内部的な境界条件を厳密に扱うことは実用上、非常に困難をとまなう。しかしながら、このような部分的補剛の条件を、局所的にある程度平均化された特性としてとらえた3次元解析を行ったのち、スライスされた2次元問題、あるいは、局所的な問題に帰着させて取扱うのも1つの方法であろう。本文は、このような見地に立って、部分的な補剛条件を内蔵する3次元弾性問題の1つの数值解法とその応用例について述べる。

なお、筆者は、その1部について文献²⁾ですべてに報告したが、その後得られたデータを加えて報告する。

2. 解法; 3次元体の微小エレメントについて、応力(σ)を $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 変位および、ひずみ(ϵ)を、 $u, v, w, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ とすると、応力-ひずみの関係は、

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\epsilon\} \text{ ----- (1)}$$

$$[D]: \text{弾性マトリックス} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{61} & a_{62} & \dots & a_{66} \end{bmatrix} \quad \text{ただし、} a: \text{弾性係数}$$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$[D_0]$ を基本となる弾性マトリックス(等方性弾性体)とし

$$[D] = [D_0] + [\Delta D] \text{ ----- (2)}$$

のように分離すると式(1)は、

$$\{\sigma\} = [D_0] \cdot \{\epsilon\} + [\Delta D] \cdot \{\epsilon\} \text{ ----- (3)}$$

ここで

$$[D_0] = \begin{bmatrix} 2G_0 \lambda_0 & \lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_0 & 2G_0 \lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_0 & \lambda_0 & 2G_0 \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_0 \end{bmatrix}$$

ただし
 G_0 : せん断弾性係数 ($= \frac{E_0}{2(1+\nu_0)}$)
 E_0 : ヤング率 ν_0 : ポアソン比
 $\lambda_0 = \frac{\nu_0 E_0}{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)}$

1). 岡村, 島田; 3次元弾塑性非軸対称問題の一数值解法, 本学会に提出した別文

2). 岡村, 島田; 補剛材を部分的に内蔵する3次元弾性体の一数值解法, 土木学会関西支部(47.5)

そこで、釣合条件式は、つぎのように書ける。

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \right) + G_0 \nabla^2 u &= - \left(\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}^*}{\partial z} \right) = - \bar{X} \\ (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) + G_0 \nabla^2 v &= - \left(\frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x} \right) = - \bar{Y} \\ (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + G_0 \nabla^2 w &= - \left(\frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial y} \right) = - \bar{Z} \end{aligned} \right\} \text{----- (4)}$$

ただし $\{\sigma^*\} = [\Delta D] \{\varepsilon\}$

$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ は、弾性マトリックスの変化量に從属する関数であり、釣合条件式の性格から、Body Force と同様の意味をもつ物理量であることがわかる。一般に3次元向題において、解の見出されていゝ基本的なCaseは、等方性弾性体の場合である。よつて式(4)の解は、変数を分離して、

$$\left. \begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ v &= v_1 + v_2 \\ w &= w_1 + w_2 \end{aligned} \right\} \text{----- (5)}$$

また、

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1\} + \{\varepsilon_2\} \text{----- (6)}$$

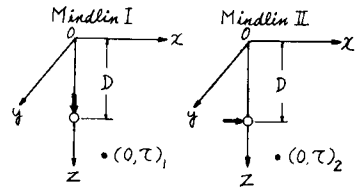


図-1

とし、 (u_1, v_1, w_1) は、式(4)の右辺を0とした解として与える。すなわち、荷重に対し、ある境界を持つ解(筆者がすでに報告した、表面荷重、ならぬに他の面の境界調整を含む解²⁾)であり、本向題において、特解としての性格を持つ解となる。

(u_2, v_2, w_2) は、

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial z \partial x} \right) + G_0 \nabla^2 u_2 &= - \bar{X} \\ (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y \partial z} \right) + G_0 \nabla^2 v_2 &= - \bar{Y} \\ (\lambda_0 + G_0) \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} \right) + G_0 \nabla^2 w_2 &= - \bar{Z} \end{aligned} \right\} \text{----- (7)}$$

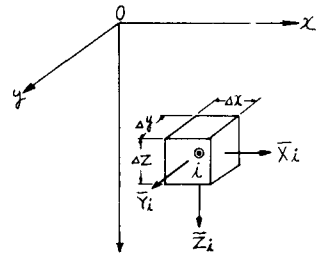


図-2

式(7)は、明らかに $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ の各項に u, v, w の微分項を

含む複雑な形になっており、厳密解はとうてい得られない。しかし前述のように、これは、Body Force と同じ性格を持つものである。そこで別文¹⁾で示した解法と同様な手法にもとづく方法を導入する。すなわち図-2に示すように、強化される点(i)を含む比較的小さい有限な容積($\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$)では、これらの物理量が平均値を持つものとみなす。そうすれば、ここに単位の強さ、 $\bar{x}_i = 1, \bar{y}_i = 1, \bar{z}_i = 1$ を持つBody Force が働いた時の u_2, v_2, w_2 は、図-1に示すMindlin解の3重積分によって求まる。本文では、この種の積分を、すでに前論文³⁾に示したように、長方形面に対しては厳密な2重積分をおこなひ、これに直角な方向の積分は和分による方法を用いた。

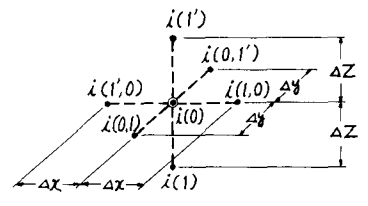
$$これを、 u_2(\bar{x}_i = 1) = U_{2i}, u_2(\bar{y}_i = 1) = U_{2i}', u_2(\bar{z}_i = 1) = U_{2i}'' \text{----- (8)}$$

$$とすれば、 u_2 = \sum (\bar{x}_i \cdot U_{2i} + \bar{y}_i \cdot U_{2i}' + \bar{z}_i \cdot U_{2i}'') \text{----- (9)}$$

3) 岡村、島田； 3次元弾性向題の1数値解法と其の応用 土木学会論文報告集 No199, 1972

v_2, w_2 も同様に求まる。

ここで、 \sum_i は、補剛材により強化されるすべての点における、平均化された物理量の影響の重ね合せである。さて $\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i$ は、つぎのような近似法により表現する。図-3 に示すように強化された点の周囲に部分的な差分ネットを組み、式(4)で与えられる $\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i$ は i 点を囲む点のひずみ (ϵ)、および弾性マトリックスの変化量 $[\Delta D]$ を用いて差分表示することによって、 ϵ_2 に関する1次関数の形で与えられる。



点 $[i(0)]$ を囲む
6個の点の指標
図-3

$$\bar{X}_i = \frac{1}{2\Delta x} (\sigma_{xi}^*(1,0) - \sigma_{xi}^*(1,0)) + \frac{1}{2\Delta y} (\tau_{xyi}^*(0,1) - \tau_{xyi}^*(0,1)) - \frac{1}{2\Delta z} (\tau_{zxi}^*(1) - \tau_{zxi}^*(1)) \quad (10)$$

ただし、 $\{\sigma_i^*\} = [\Delta D_i] \cdot \{\epsilon_i + \epsilon_{2i}\}$
 \bar{Y}_i, \bar{Z}_i も同様に求まるが、紙面の都合で省略する。

3. 計算方法; まず荷重による各点の弾性解 u_i, v_i, w_i 、および、ひずみ $\{\epsilon_i\}$ を定め、補剛材により強化された部分においては、単位の Body Force、 $\bar{X}_i = 1, \bar{Y}_i = 1, \bar{Z}_i = 1$ が作用した場合の各点の影響値 ($\bar{\epsilon}_2$) を求めておけば、強化された各点で要求される下記の連立方程式から (ϵ_2) を求めることができる。

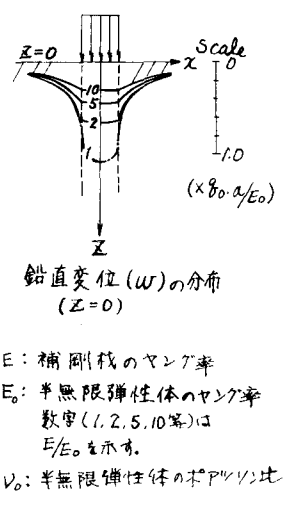
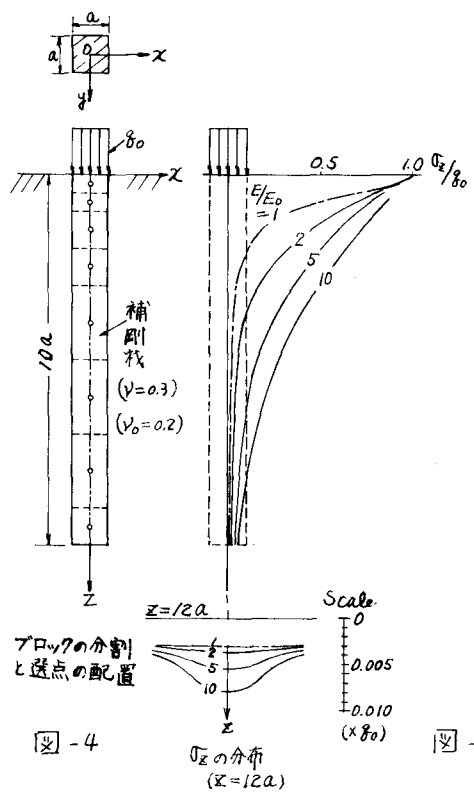
$$\epsilon_2 = \sum_i \{ \bar{\epsilon}_2(\bar{X}_i=1) \cdot \bar{X}_i + \bar{\epsilon}_2'(\bar{Y}_i=1) \cdot \bar{Y}_i + \bar{\epsilon}_2''(\bar{Z}_i=1) \cdot \bar{Z}_i \} \quad (11)$$

ただし、 $\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i$ は式(10)に示した $[\Delta D]$ 、 $\{\epsilon_i + \epsilon_{2i}\}$ を含む差分式である。

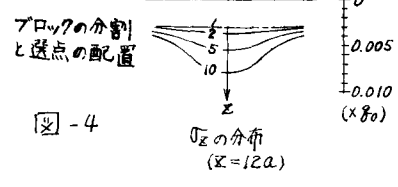
これらの解より強化された部分で評価されるべきでない $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ が求まる。これらの作用により、調整力によって作られた境界条件は乱されるので再び、境界条件を修正する。以上の過程を繰返し、境界および剛性の異なる部分が収束するまで計算する。

4. 計算例;

例1) 図-4に示すような1本の鉛直補剛材を半無限弾性体内に設け、その補剛材に荷重 q_0 が作用した場合の解析を行なった。補剛材の



E: 補剛材のヤング率
 E₀: 半無限弾性体のヤング率
 数字(1, 2, 5, 10等)は E/E₀ を示す。
 ν₀: 半無限弾性体のポアソン比



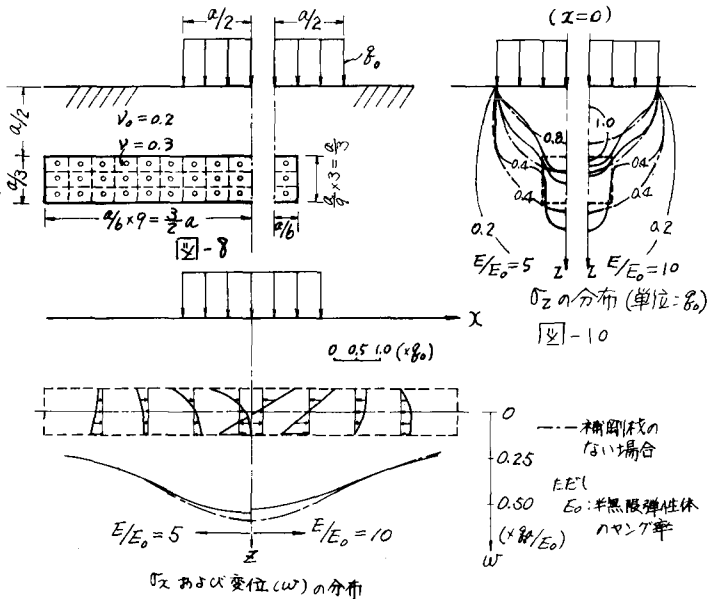
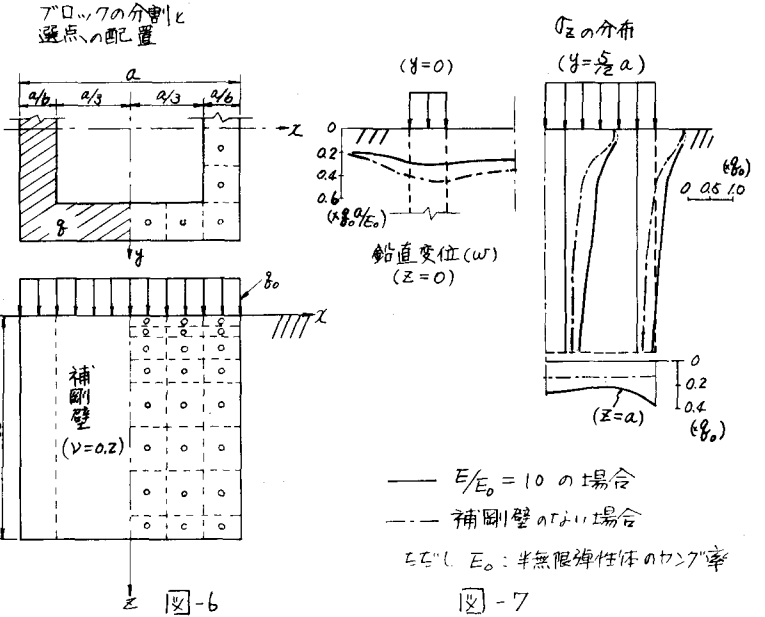
剛性を、半無限弾性体の、2, 5, 10倍に増加したときの補剛棧内、およびその下の応力 σ_z および、表面の変形状態を図-5に示した。なお、この計算において、鉛直補剛棧の上端の部分において、応力に若干の乱れを生じたが、この部分の差分ネットを密にするにより、解を乱すことなく解決された。

例2) 半無限弾性体内に、図-6に示すような4つの鉛直補剛壁を結合し、その補剛壁に荷重 q_0 が作用し、その剛性を半無限弾性体の10倍に増加した時の解析を行った。

図-7に、補剛壁内の応力 σ_z 、および表面の変形状態の一部を、補剛壁のない場合と対比して示した。なお、鉛直方向の差分ネットは、例1)と同様である。補剛壁の深いところでは、 σ_z の分布が隅に若干集中する現象がみられる。

例3) 図-8に示すように、半無限弾性体上に矩形分布荷重 q_0 が作用し、弾性体内部に1つの水平補剛棧を設け、その補剛棧の剛性を5, 10倍に増加した時の解析を行った。図-9に補剛棧内の σ_z の分布、および補剛棧の中心軸の変形を剛性が変化した場合について示した。

このように弾性体によって、補剛棧が完全に囲まれた状態では、変形には大差がないが、内部の応力には顕著な差が見られる。また図-10には、中央断面において、 σ_z が、補剛棧の所に集中する現象を示した。



5. 結論; 3つの基礎的な計算例を示したが、この範囲では、本解析が、部分的に剛性の変化する3次元問題に対して、有用な方法として拡張されるように思われる。今後、多様に剛性の変化する問題を扱う場合、問題によっては、Saint-Venant の原理を応用し、影響範囲を制限して、記憶容量を節減しうなような、プログラムの開発を行ってみたい。