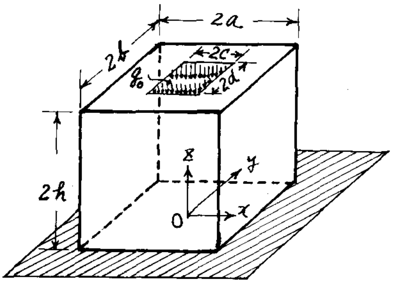
I-49　　直方体の応力解析について

北大工学部　正員　奥村　勇

1. まえがき　本文は図−1に示す直方体がその上面に一様な矩形分布の部分圧縮荷重を受け，(a) 底面の変位が完全に拘束された場合，(b) 底面が滑らかな剛の平面上に置かれた場合とについて級数解法により応力解析を行なったものである。計算例としては，(b) の場合のそれを示した。

2. 基礎方程式とその解　変位 $\mathfrak{u}$ (u, v, w) で表わした弾性体の釣合方程式は次式となる。



図−1

$$\nabla^2\mathfrak{u}+\frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{u}=0 \qquad (1)$$

式 (1) の解として，J. Boussinesq の解に等価な一般化された H. Neuber の解を適用する。

$$2G\mathfrak{u}=-\mathrm{grad}\,F+4(1-\nu)\Phi+2\,\mathrm{rot}\,\Theta \qquad (2)^{(注}$$

ここで

$$F=\Phi_0+\mathfrak{r}\Phi,\quad \Phi=(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3),\quad \Theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3),\quad \mathfrak{r}=(x,y,z) \qquad (3)'$$

Φ_0, Φ_i, θ_i ($i=1,2,3$) は3次元的調和関数であり，Gはせん断弾性係数を表わす。式 (3) の第1式より F が重調和関数となることに着目して，$F=e^{i\alpha_i x}e^{i\beta_s y}e^{ik_u z}$ を $\nabla^2\nabla^2F=0$ に代入して F を求めると，例えば

$$F_{is}=\sum_i\sum_s\cos\alpha_i x\cos\beta_s y\,(C_{is}^1\cosh\gamma_{is}z+\bar{C}_{is}^1\sinh\gamma_{is}z+C_{is}^2z\sinh\gamma_{is}z+\bar{C}_{is}^2z\cosh\gamma_{is}z)$$

となる。上式と式 (3) の第1式より

$$\Phi_{03}=-\sum_i\sum_s\cos\alpha_i x\cos\beta_s y\,(C_{is}^1\cosh\gamma_{is}z+\bar{C}_{is}^1\sinh\gamma_{is}z)$$
$$\Phi_3=\sum_i\sum_s\cos\alpha_i x\cos\beta_s y\,(C_{is}^2\sinh\gamma_{is}z+\bar{C}_{is}^2\cosh\gamma_{is}z) \qquad (4)$$

が求められる。Φ_{01}，Φ_1, Φ_{02} および Φ_2 も同様にして得られる。Φ_0, Φ_i と独立な調和関数 θ_i は自由に選べて，例えば本問題に適した θ_3 は次式のようになる。

$$\theta_3=\sum_i\sum_s\sin\alpha_i x\sin\beta_s y\,(C_{is}^3\cosh\gamma_{is}z+\bar{C}_{is}^3\sinh\gamma_{is}z) \qquad (5.1)$$

ここで　$\alpha_i=i\pi/a,\ \beta_s=s\pi/b,\ \gamma_{is}^2=\alpha_i^2+\beta_s^2$　(5.2)

3. 境界条件と係数列の連立方程式　(a) の場合に対する境界条件は次式となる。

$x=\pm a$ で　$\tau_{xz}=0,\ \tau_{xy}=0,\ \sigma_x=0$　(6)　$y=\pm b$ で　$\tau_{xy}=0,\ \tau_{yz}=0,\ \sigma_y=0$　(7)

$z=0$ で　$u=0,\ v=0,\ w=0,$　(8)　$z=2h$ で　$\tau_{xz}=0,\ \tau_{yz}=0,\ \sigma_z=-p(x,y)$　(9)

図−1に示した直方体が $x=0$ 面および $y=0$ 面に関して対称な応力状態にあることを考慮して，Φ_0，Φ_i および θ_i に含まれる18個の係数列が x に関する $\{A_{ns}^1\}$, $\{A_{ns}^2\}$, $\{A_{ns}^3\}$ および y に関する $\{B_{ni}^1\}$, $\{B_{ni}^2\}$, $\{B_{ni}^3\}$ と式 (4), (5.1) に含まれる計12個の係数列に減少する。

式 (6) の最初の2式と式 (7) の最初の2式より次式が得られる。

$$A_{ns}^3=0,\quad A_{ns}^1=A_{ns}^2\,(2\nu-1+l_{ns}a\coth l_{ns}a)/l_{ns} \qquad (10)$$
$$B_{ni}^3=0,\quad B_{ni}^1=B_{ni}^2\,(2\nu-1+m_{ni}b\coth m_{ni}b)/m_{ni} \qquad (11)$$

また，式（9）の最初の2式と式（8）の最後の式より次の関係が得られる。

$$\overline{C}_{is}^{1} = (4\nu - 3)\overline{C}_{is}^{2}/\gamma_{is}, \quad C_{is}^{3} = -\overline{C}_{is}^{3}\coth 2h\gamma_{is} \qquad (12)$$

$$C_{is}^{1} = [C_{is}^{2}\{2h\gamma_{is}\coth 2h\gamma_{is} + 2\nu - 1\} + \overline{C}_{is}^{2}\{2(1-\nu)\coth 2h\gamma_{is} + 2h\gamma_{is}\}]/\gamma_{is}$$

荷重 $p(x,y)$ の級数展開において生ずる定数項に対応して，$z = 2h$ の面で $\sigma_z = const.$ となり，上の境界条件を満たす解が必要となる。それを J. Boussinesq の第3基本解よりもとめて次式を得る。

残りの境界条件を満足させるため，直応力および変位を Fourier 級数に展開し，残りの5個の係数列を定める連立方程式が次式のように得られる。

$$[u]_{z=0} = 0 : \sum_{n=0}({}_nI_{is}^{1}A_{ns}^{2} + {}_nJ_{si}^{1}B_{ni}^{2}) + K_{is}^{1}C_{is}^{2} + \overline{K}_{is}^{1}\overline{C}_{is}^{2} + \overline{L}_{is}^{1}\overline{C}_{is}^{3} = M_{is}^{1} \qquad (13.1)$$

$$[v]_{z=0} = 0 : \sum_{n=0}({}_nJ_{is}^{2}A_{ns}^{2} + {}_nI_{si}^{2}B_{ni}^{2}) + K_{is}C_{is}^{2} + \overline{K}_{is}^{1}\overline{C}_{is}^{2} - \overline{L}_{is}^{2}\overline{C}_{is}^{3} = M_{is}^{2} \qquad (13.2)$$

$$[\sigma_x]_{x=\pm a} = 0 : \sum_{i=0}({}_iJ_{sn}^{3}B_{ni}^{2} + {}_iK_{ns}^{2}C_{is}^{2} + {}_i\overline{K}_{ns}^{2}\overline{C}_{is}^{2} + {}_i\overline{L}_{ns}^{3}\overline{C}_{is}^{3}) + I_{ns}^{3}A_{ns}^{2} = 0 \qquad (13.3)$$

$$[\sigma_y]_{y=\pm b} = 0 : \sum_{s=0}({}_sJ_{in}^{4}A_{ns}^{2} + {}_sK_{ni}^{3}C_{is}^{2} + {}_s\overline{K}_{ni}^{3}\overline{C}_{is}^{2} - {}_s\overline{L}_{ni}^{4}\overline{C}_{is}^{3}) + I_{ni}^{4}B_{ni}^{2} = 0 \qquad (13.4)$$

$$[\sigma_z]_{z=2h} = -p(x,y) : \sum_{n=0}({}_nI_{is}^{5}A_{ns}^{2} + {}_nJ_{si}^{5}B_{ni}^{2}) + K_{is}^{4}C_{is}^{2} + \overline{K}_{is}^{4}\overline{C}_{is}^{2} = -p_{is} \qquad (13.5)$$

ここで，$l_{ns}^2 = k_n^2 + \beta_s^2$，$m_{ni}^2 = k_n^2 + \alpha_i^2$，$k_n = n\pi/2h$，$\varepsilon_s = 1\ (s \geq 1)$，$\varepsilon_0 = 1/2$ とすると

$$I_{ns}^{3} = l_{ns}(l_{ns}a/\sinh l_{ns}a + \cosh l_{ns}a) \qquad (14.1)$$

$${}_iJ_{sn}^{3} = 4\sinh m_{ni}b\,(-1)^{s+i}\varepsilon_s\{\alpha_i^2\beta_s^2 + \nu k_n^2(m_{ni}^2 + \beta_s^2)\}/(b(m_{ni}^2 + \beta_s^2)^2) \qquad (14.2)$$

$${}_iK_{ns}^{2} = 2\sinh 2h\gamma_{is}\,(-1)^{i+n}\varepsilon_n\{\alpha_i^2k_n^2 + \nu\beta_s^2(\gamma_{is}^2 + k_n^2)\}/(h(\gamma_{is}^2 + k_n^2)^2) \qquad (14.3)$$

$${}_nI_{is}^{5} = 4\sinh l_{ns}a\,(-1)^{i+n}\varepsilon_i\{k_n^2\alpha_i^2 + \nu\beta_s^2(l_{ns}^2 + \alpha_i^2)\}/(a(l_{ns}^2 + \alpha_i^2)^2) \qquad (15.1)$$

$${}_nJ_{si}^{5} = 4\sinh m_{ni}b\,(-1)^{s+n}\varepsilon_s\{k_n^2\beta_s^2 + \nu\alpha_i^2(m_{ni}^2 + \beta_s^2)\}/(b(m_{ni}^2 + \beta_s^2)^2) \qquad (15.2)$$

$$K_{is}^{4} = \gamma_{is}(2h\gamma_{is}/\sinh 2h\gamma_{is} + \cosh 2h\gamma_{is}) \qquad (15.3)$$

$$p_{is} = 2dq_0\sin\alpha_i c/b\pi i + 2cq_0\sin\beta_s d/a\pi s + 4q_0\sin\alpha_i c\sin\beta_s d/\pi^2 is \qquad (16)$$

他の係数列に関係した係数の記載は省略する。

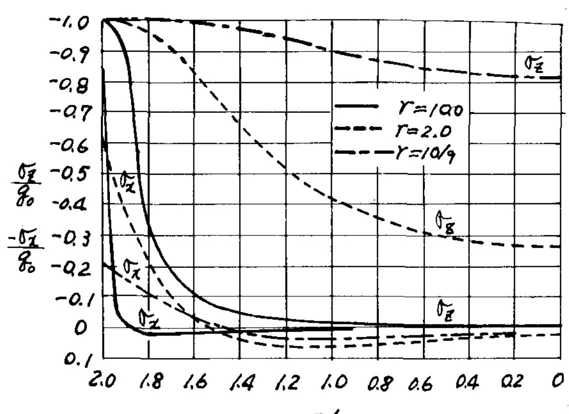
（b）の場合に対する境界条件は $z = 0$ で $\tau_{xz} = 0$，$\tau_{yz} = 0$ となり，他の条件は（a）の場合と同じである。上の二つの条件より $\overline{C}_{is}^{2} = 0$，$\overline{C}_{is}^{3} = 0$ となり式（13.3），式（13.4）および式（13.5）で $\overline{C}_{is}^{2}$ と $\overline{C}_{is}^{3}$ をはずした3式が（b）の場合に対する連立方程式となる。

${}_sI_{ni}^{4}$，${}_sJ_{in}^{4}$，${}_sK_{ni}^{3}$ は式（14）で $i \rightleftarrows s$，$\alpha_i \rightleftarrows \beta_s$，$l_{ns} \rightleftarrows m_{ni}$ と置換して得られる。

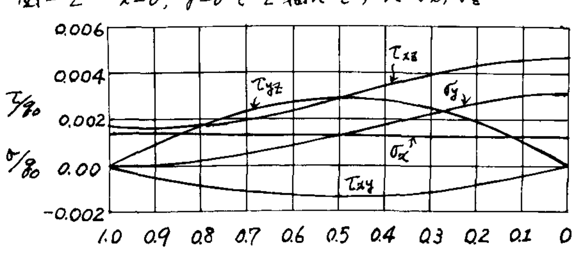
4. 計算例

（b）の場合について，$a/b = 1.0$，$a/h = 1.0$，$\nu = 0.15$ で $\gamma = a/c$ の3つの値に対して応力を求め右に図示した。

注）秦 謹一 「短直方柱並に矩形厚板に関する三次元的弾性問題の基礎的研究」 学位論文，北海道大学 1961



図－2　$x=0$，$y=0$ で z軸にそった σ_x，σ_z



図－3　$x=0.5a$，$z=h$ で異なった y における応力