I-48　円筒座標に関する非軸対称三次元応力解析について

室蘭工業大学　正員　能町純雄
同　同　○松岡健一

筆者らは、これまで、円筒座標に関する三次元弾性問題を、Fourier-Hankel 変換を用いて解析する方法で、2、3の軸対称問題を解析し発表した。本研究は、これを、非軸対称弾性問題へ拡張し、数値計算を行なったものである。解析の方法は、まず、円筒座標に関する非軸対称問題に対して、基本微分方程式から Hook の法則を用いて、各変位の Fourier-Hankel 変換を求め、次に、これを逆変換し、各変位成分の一般式を え、さらに、Hook の法則から、各応力成分の一般式を求めるものである。

1. Fourier-Hankel 変換記号および逆変換

$$S_n[f(x)] = \int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx,$$

$$C_n[f(x)] = \int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi}{a}x\,dx, \quad n=1,2,\cdots$$

とすれば、この逆変換は

$$f(x) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty} S_n[f(x)]\sin\frac{n\pi}{a}x$$

$$f(x) = \frac{2}{a}\left\{\frac{1}{2}\int_0^a f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} C_n[f(x)]\cos\frac{n\pi}{a}x\right\}$$

また

$$H_\nu[f(x)] = \int_a^b f(x)\cdot x H_\nu(\xi_i x)\,dx,$$

$$H_{\nu+1}[f(x)] = \int_a^b f(x)\cdot x H_{\nu+1}(\xi_i x)\,dx,$$

$$H_{\nu-1}[f(x)] = \int_a^b f(x)\cdot x H_{\nu-1}(\xi_i x)\,dx,$$

とすれば、

$$f(x) = \frac{2}{b^2}\sum_{i=1}^{\infty} H_\nu[f(x)]\frac{H_\nu(\xi_i x)}{\Theta_i^2},$$

$$f(x) = \frac{2}{b^2}\sum_{i=1}^{\infty} H_{\nu+1}[f(x)]\frac{H_{\nu+1}(\xi_i x)}{\Theta_i^2},$$

$$f(x) = \frac{2\nu x^{\nu-1}}{b^{2\nu}-a^{2\nu}}\int_a^b f(x)x^{\nu}\,dx + \frac{2}{b^2}\sum H_{\nu-1}[f(x)]\frac{H_{\nu-1}(\xi_i x)}{\Theta_i^2},$$

ただし

$$H_\nu(\xi_i x) = J_\nu(\xi_i x)Y_\nu(\xi_i a) - J_\nu(\xi_i a)Y_\nu(\xi_i x),$$

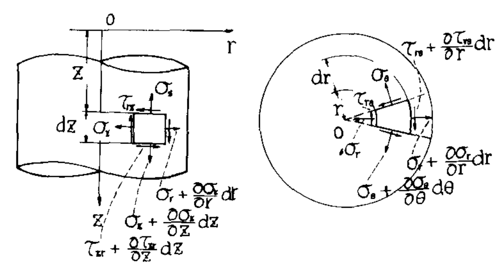
$$H_{\nu\pm1}(\xi_i x) = J_{\nu\pm1}(\xi_i x)Y_\nu(\xi_i a) - J_\nu(\xi_i a)Y_{\nu\pm1}(\xi_i x),$$

ξ_i ; $H_\nu(\xi_i b)=0$ の根 $(i=1,2,\cdots\cdots)$,

$$\Theta_i^2 = \{H_{\nu-1}(\xi_i b)\}^2 - \frac{a^2}{b^2}\{H_{\nu-1}(\xi_i a)\}^2.$$

2. 基本微分方程式

円筒座標に関する力のつり合式は、$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ を直応力、$\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{zr}$ をせん断応力とし、物体力を無視すると、



$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial z} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = 0 \qquad (3)$$

また u, v, w を r, θ, z 方向の変位とすると、Hooke の法則は

$$\{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z\} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\partial\theta} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\left\{\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\partial\theta}, \frac{\partial w}{\partial z}\right\} \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}\tau_{\theta z} &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r\partial\theta}\right), \quad \tau_{zr} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right)\\ \tau_{r\theta} &= \mu\left(\frac{\partial u}{r\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ただし、μ, λ は Lamé の定数である。

3. 基本微分方程式の Fourier-Hankel 変換

(1)～(3)式に、$L_1 = \cos\nu\theta\cdot\sin Nz\cdot R(r)$, $L_2 = \sin\nu\theta\cdot\sin Nz\cdot R(r)$, $L_3 = \cos\nu\theta\cdot\cos Nz\cdot R_1(r)$ をそれぞれ乗じ、r, θ, z について部分積分を行い、さらに Hook の法則を用いて積分をくり返すと、

$$\int(1)\times\cos\nu\theta\cdot\sin Nz\cdot R(r)\,dV = \mathbb{C}_m\mathbb{S}_n[\sigma_r\cdot R]_{r=b} - \mathbb{C}_m\mathbb{S}_n[\sigma_r\cdot R]_{r=a} - \mathbb{C}_m\mathbb{S}_n\left[U\cdot\left\{(2\mu+\lambda)\frac{dR}{dr}-2\mu\frac{R}{r}\right\}\right]_{r=b}$$
$$+\mathbb{C}_m\mathbb{S}_n\left[U\cdot\left\{(2\mu+\lambda)\frac{dR}{dr}-2\mu\frac{R}{r}\right\}\right]_{r=a} + \nu\mu\left\{\mathbb{S}_m\mathbb{S}_n\left[V\cdot\frac{R}{r}\right]_{r=b} - \mathbb{S}_m\mathbb{S}_n\left[V\cdot\frac{R}{r}\right]_{r=a}\right\}$$
$$-N\mu\left\{\mathbb{C}_m\mathbb{C}_n[W\cdot R]_{r=b} - \mathbb{C}_m\mathbb{C}_n[W\cdot R]_{r=a}\right\} - N\mu\int_a^b R\left\{\mathbb{C}_m[U]_{z=c}(-1)^n - \mathbb{C}_m[U]_{z=0}\right\}dr$$
$$+\int_a^b\mathbb{C}_m\mathbb{S}_n[U]\left\{(2\mu+\lambda)\left(\frac{d^2R}{dr^2}-\frac{dR}{rdr}\right)-\mu\left(\nu^2\frac{R}{r^2}+N^2R\right)\right\}dr - \nu\int_a^b\mathbb{S}_m\mathbb{S}_n[V]\left\{(\mu+\lambda)\frac{dR}{rdr}+2\mu\frac{R}{r^2}\right\}dr$$
$$+N(\mu+\lambda)\int_a^b\mathbb{C}_m\mathbb{C}_n[W]\frac{dR}{dr}\cdot dr = 0 \qquad (6)$$

$$\int(2)\times\sin\nu\theta\cdot\sin Nz\cdot R(r)\,dV = \mathbb{S}_m\mathbb{S}_n[\tau_{r\theta}\cdot R]_{r=b} - \mathbb{S}_m\mathbb{S}_n[\tau_{r\theta}\cdot R]_{r=a} - \mu\,\mathbb{S}_m\mathbb{S}_n\left[V\left(\frac{dR}{dr}-2\frac{R}{r}\right)\right]_{r=b}$$
$$+\mu\,\mathbb{S}_m\mathbb{S}_n\left[V\left(\frac{dR}{dr}-2\frac{R}{r}\right)\right]_{r=a} - \nu\lambda\left\{\mathbb{C}_m\mathbb{S}_n\left[U\frac{R}{r}\right]_{r=b} - \mathbb{C}_m\mathbb{S}_n\left[U\frac{R}{r}\right]_{r=a}\right\}$$
$$-N\mu\int_a^b R\left\{(-1)^n\mathbb{S}_m[V]_{z=c} - \mathbb{S}_m[V]_{z=0}\right\}dr + \nu\int_a^b\mathbb{C}_m\mathbb{S}_n[U]\left\{(\mu+\lambda)\frac{dR}{rdr}-2(3\mu+\lambda)\frac{dR}{dr}\right\}dr$$
$$+\int_a^b\mathbb{S}_m\mathbb{S}_n[V]\left\{\mu\left(\frac{d^2R}{dr^2}-\frac{dR}{rdr}-N^2R\right)-(3\mu+\lambda)\nu^2\frac{R}{r^2}\right\}dr + \nu N(\mu+\lambda)\int_a^b\mathbb{C}_m\mathbb{C}_n[W]\frac{R}{r}\,dr = 0 \qquad (7)$$

$$\int(3)\times\cos\nu\theta\cdot\cos Nz\cdot R_1(r)\,dV = \mathbb{C}_m\mathbb{C}_n[\tau_{rz}\cdot R]_{r=b} - \mathbb{C}_m\mathbb{C}_n[\tau_{rz}\cdot R]_{r=a} - \mu\left\{\mathbb{C}_m\mathbb{C}_n\left[W\cdot\left(\frac{dR}{dr}-\frac{R}{r}\right)\right]_{r=b}\right.$$
$$\left.-\mathbb{C}_m\mathbb{C}_n\left[W\left(\frac{dR}{dr}-\frac{R}{r}\right)\right]_{r=a}\right\} + N\lambda\left\{\mathbb{C}_m\mathbb{S}_n[U\cdot R]_{r=b} - \mathbb{C}_m\mathbb{S}_n[U\cdot R]_{r=a}\right\} - \mu\int_a^b\left\{(-1)^n\mathbb{C}_m[U]_{z=c}\right.$$
$$\left.-\mathbb{C}_m[U]_{z=0}\right\}\left(\frac{dR}{dr}-\frac{R}{r}\right)dr - \nu\mu\int_a^b\left\{(-1)^n\mathbb{S}_m[V]_{z=c} - \mathbb{S}_m[V]_{z=0}\right\}\frac{R}{r}\,dr + \int_a^b R\left\{(-1)^n\mathbb{C}_m[\sigma_z]_{z=c} - \mathbb{C}_m[\sigma_z]_{z=0}\right\}dr$$
$$-(\mu+\lambda)N\int_a^b\mathbb{C}_m\mathbb{S}_n[U]\,r\frac{d}{dr}\left(\frac{R}{r}\right)dr + (\mu+\lambda)\nu N\int_a^b\mathbb{S}_m\mathbb{S}_n[V]\frac{R}{r}\,dr + \int_a^b\left\{\mu\left(\frac{d^2R}{dr^2}-\frac{dR}{rdr}+\frac{R}{r^2}-\nu^2\frac{R}{r^2}\right)\right.$$
$$\left.-(2\mu+\lambda)N^2R\right\}\mathbb{C}_m\mathbb{C}_n[W]\,dr = 0 \qquad (8)$$

ただし，上式中，$\nu = m/2$ $(m=1,4,\cdots)$，$N = n\pi/c$ $(n=1,2,\cdots)$ また，a = 円筒の内径，b = 円筒の外径，c = 円筒の長さである。

4．変位の Fourier-Hankel 変換および逆変換

ここで，$A_{mnr} = \mathbb{C}_m\mathbb{S}_n[U] + \mathbb{S}_m\mathbb{S}_n[V]$，$B_{mnr} = \mathbb{C}_m\mathbb{S}_n[U] - \mathbb{S}_m\mathbb{S}_n[V]$ とし，(6)+(7) を作り，$R(r) = rH_{\nu+1}(\xi_i r)$ とすると，

$$\mathbb{C}_m\mathbb{S}_n[\sigma_r)_{r=b}]bH_{\nu+1}(\xi_i b) - \mathbb{C}_m\mathbb{S}_n[\sigma_r)_{r=a}]aH_{\nu+1}(\xi_i a) + \mathbb{S}_m\mathbb{S}_n[\tau_{r\theta})_{r=b}]bH_{\nu+1}(\xi_i b) - \mathbb{S}_m\mathbb{S}_n[\tau_{r\theta})_{r=a}]aH_{\nu+1}(\xi_i a)$$
$$-2\mu N\left\{(-1)^n\mathbb{H}_{\nu+1}[A_{mcr}] - \mathbb{H}_{\nu+1}[A_{mor}]\right\} + 4\mu(\nu+1)\left\{A_{mnb}H_{\nu+1}(\xi_i b) - A_{mna}H_{\nu+1}(\xi_i a)\right\}$$
$$-\mu N\left\{\mathbb{C}_m\mathbb{C}_n[W_{r=b}]bH_{\nu+1}(\xi_i b) - \mathbb{C}_m\mathbb{C}_n[W_{r=a}]aH_{\nu+1}(\xi_i a)\right\} - \left\{(3\mu+\lambda)\xi_i^2 + 2\mu N^2\right\}\mathbb{H}_{\nu+1}[A_{mnr}]$$
$$+(\mu+\lambda)\xi_i^2\,\mathbb{H}_{\nu-1}[B_{mnr}] + (\mu+\lambda)\xi_i N\,\mathbb{H}_\nu\mathbb{C}_m\mathbb{C}_n[W] = 0 \qquad (9)$$

同様に，(6)−(7) を作り，$R(r) = rH_{\nu-1}(\xi_i r)$ とすると

$$\mathbb{C}_m\mathbb{S}_n[\sigma_r)_{r=b}]bH_{\nu-1}(\xi_i b) - \mathbb{C}_m\mathbb{S}_n[\sigma_r)_{r=a}]aH_{\nu-1}(\xi_i a) - \mathbb{S}_m\mathbb{S}_n[\tau_{r\theta})_{r=b}]bH_{\nu-1}(\xi_i b) + \mathbb{S}_m\mathbb{S}_n[\tau_{r\theta})_{r=a}]aH_{\nu-1}(\xi_i a)$$
$$-2\mu N\left\{(-1)^n\mathbb{H}_{\nu-1}[B_{mcr}] - \mathbb{H}_{\nu-1}[B_{mor}]\right\} - 4\mu(\nu-1)\left\{B_{mnb}H_{\nu-1}(\xi_i b) - B_{mna}H_{\nu-1}(\xi_i a)\right\}$$
$$-\mu N\left\{\mathbb{C}_m\mathbb{C}_n[W_{r=b}]bH_{\nu-1}(\xi_i b) - \mathbb{C}_m\mathbb{C}_n[W_{r=a}]aH_{\nu-1}(\xi_i a)\right\} + (\mu+\lambda)\xi_i^2\,\mathbb{H}_{\nu+1}[A_{mnr}]$$
$$-\left\{(3\mu+\lambda)\xi_i^2 + 2\mu N^2\right\}\mathbb{H}_{\nu-1}[B_{mnr}] - (\mu+\lambda)\xi_i N\,\mathbb{H}_\nu\mathbb{C}_m\mathbb{C}_n[W] = 0 \qquad (10)$$

また，(8) 式で $R_1(r) = rH_\nu(\xi_i r)$ とすると

$$(-1)^n\mathbb{H}_\nu\mathbb{C}_m[\sigma_z)_{z=c}] - \mathbb{H}_\nu\mathbb{C}_m[\sigma_z)_{z=0}] + \mu\left\{\mathbb{C}_m\mathbb{C}_n[W_{r=b}]bH_{\nu+1}(\xi_i b) - \mathbb{C}_m\mathbb{C}_n[W_{r=a}]aH_{\nu+1}(\xi_i a)\right\}$$
$$+\mu\xi_i\left\{(-1)^n\mathbb{H}_{\nu+1}[A_{mcr}] - \mathbb{H}_{\nu+1}[A_{mor}] - (-1)^n\mathbb{H}_{\nu-1}[B_{mcr}] + \mathbb{H}_{\nu-1}[B_{mor}]\right\}$$
$$+(\mu+\lambda)N\xi_i\left\{\mathbb{H}_{\nu+1}[A_{mnr}] - \mathbb{H}_{\nu-1}[B_{mnr}]\right\} + \left\{\mu\xi_i^2 + (2\mu+\lambda)N^2\right\}\mathbb{H}_\nu\mathbb{C}_m\mathbb{C}_n[W] = 0 \qquad (11)$$

(9)～(11)を，$\mathbb{H}_{\nu+1}[A_{mnr}]$，$\mathbb{H}_{\nu-1}[B_{mnr}]$，$\mathbb{H}_\nu \mathbb{C}_m \mathbb{C}_n[w]$について解き，これを逆変換して，各変位成分を与える一般式をえる。 下に示す関数を用いて，境界値も後に示すようにおくと，

$$u=\frac{1}{\pi c}\sum_m \sin Nz\cdot\sum_{k=1}^{2}\Big[\frac{1}{\mu N}\Big\{G_1^{(k)}(Nr)-\frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)}F_1^{(k)}(Nr)\Big\}\alpha_{onk}-\Big\{G_1^{(k)}(Nr)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}F_1^{(k)}(Nr)\Big\}D_{onk}+\frac{1}{N}\Big\{G_1^{(k)}(Nr)$$
$$-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}F_1^{(k)}(Nr)\Big\}A_{onk}\Big]+\frac{1}{\pi b^2}\sum_i\frac{H_1(\xi_i r)}{\Theta_i^2}\sum_{k=1}^{2}\Big[-\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\cdot\frac{1}{\xi_i}P^{(k)}(\xi_i z)\gamma_{oik}+\Big\{Q^{(k)}(\xi_i z)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}P^{(k)}(\xi_i z)\Big\}E^a_{oik}\Big]$$
$$+\frac{2}{\pi c}\sum_m\sum_\nu\cos\nu\theta\cdot\sin Nz\cdot\sum_{k=1}^{2}\Big[\frac{1}{2\mu N}\Big\{G_{\nu+1}^{(k)}(Nr)+G_{\nu-1}^{(k)}(Nr)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\big(F_{\nu+1}^{(k)}(Nr)+F_{\nu-1}^{(k)}(Nr)\big)\Big\}\alpha_{mnk}+\frac{1}{2\mu N}\Big\{G_{\nu+1}^{(k)}(Nr)$$
$$-G_{\nu-1}^{(k)}(Nr)\Big\}\beta_{mnk}-\frac{1}{2}\Big\{G_{\nu+1}^{(k)}(Nr)+G_{\nu-1}^{(k)}(Nr)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\big(F_{\nu+1}^{(k)}(Nr)+F_{\nu-1}^{(k)}(Nr)\big)\Big\}D_{mnk}+\frac{\nu+1}{N}\Big\{2G_{\nu+1}^{(k)}(Nr)-\frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)}$$
$$\times\big(F_{\nu+1}^{(k)}(Nr)+F_{\nu-1}^{(k)}(Nr)\big)\Big\}A_{mnk}+\frac{\nu-1}{N}\Big\{2G_{\nu-1}^{(k)}(Nr)-\frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)}\big(F_{\nu+1}^{(k)}(Nr)+F_{\nu-1}^{(k)}(Nr)\big)\Big\}B_{mnk}\Big]$$
$$+\frac{2}{\pi b^2}\sum_i\sum_\nu\cos\nu\theta\cdot\frac{1}{\Theta_i^2}\sum_{k=1}^{2}\Big[\frac{\mu+\lambda}{4\mu(2\mu+\lambda)}\cdot\frac{1}{\xi_i}\{H_{\nu-1}(\xi_i r)-H_{\nu+1}(\xi_i r)\}P^{(k)}(\xi_i z)\gamma_{mik}+\Big\{H_{\nu+1}(\xi_i r)Q^{(k)}(\xi_i z)$$
$$-\frac{\mu+\lambda}{2(\mu+\lambda)}\big(H_{\nu+1}(\xi_i r)-H_{\nu-1}(\xi_i r)\big)P^{(k)}(\xi_i z)\Big\}E^a_{mik}+\Big\{H_{\nu-1}(\xi_i r)Q^{(k)}(\xi_i z)-\frac{\mu+\lambda}{2(\mu+\lambda)}\big(H_{\nu-1}(\xi_i r)-H_{\nu+1}(\xi_i r)\big)P^{(k)}(\xi_i z)\Big\}E^b_{mik}\Big]$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_\nu\cos\nu\theta\cdot\frac{2\nu r^{\nu-1}}{b^{2\nu}-a^{2\nu}}\Big\{E^b_{mo1}+\Big(1-2\frac{z}{c}\Big)E^b_{mo2}\Big\}\qquad(12)$$

$$v=\frac{2}{\pi c}\sum_m\sum_\nu\sin\nu\theta\cdot\sin Nz\cdot\sum_{k=1}^{2}\Big[\frac{1}{2\mu N}\Big\{G_{\nu+1}^{(k)}(Nr)-G_{\nu-1}^{(k)}(Nr)-\frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)}\big(F_{\nu+1}^{(k)}(Nr)-F_{\nu-1}^{(k)}(Nr)\big)\Big\}\alpha_{mnk}+\frac{1}{2\mu N}\Big\{G_{\nu+1}^{(k)}(Nr)$$
$$+G_{\nu-1}^{(k)}(Nr)\Big\}\beta_{mnk}-\frac{1}{2}\Big\{G_{\nu+1}^{(k)}(Nr)-G_{\nu-1}^{(k)}(Nr)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\big(F_{\nu+1}^{(k)}(Nr)-F_{\nu-1}^{(k)}(Nr)\big)\Big\}D_{mnk}+\frac{\nu+1}{N}\Big\{2G_{\nu+1}^{(k)}(Nr)-\frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)}$$
$$\times\big(F_{\nu+1}^{(k)}(Nr)-F_{\nu-1}^{(k)}(Nr)\big)\Big\}A_{mnk}+\frac{\nu-1}{N}\Big\{2G_{\nu-1}^{(k)}(Nr)+\frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)}\big(F_{\nu+1}^{(k)}(Nr)-F_{\nu-1}^{(k)}(Nr)\big)\Big\}B_{mnk}\Big]$$
$$+\frac{2}{\pi b^2}\sum_i\sum_\nu\sin\nu\theta\cdot\frac{1}{\Theta_i^2}\sum_{k=1}^{2}\Big[-\frac{\mu+\lambda}{4\mu(2\mu+\lambda)}\{H_{\nu+1}(\xi_i r)+H_{\nu-1}(\xi_i r)\}\cdot\frac{1}{\xi_i}P^{(k)}(\xi_i z)\gamma_{mik}+\Big\{H_{\nu+1}(\xi_i r)Q^{(k)}(\xi_i z)-\frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)}$$
$$\times\big(H_{\nu+1}(\xi_i r)+H_{\nu-1}(\xi_i r)\big)P^{(k)}(\xi_i z)\Big\}E^a_{mik}-\Big\{H_{\nu-1}(\xi_i r)Q^{(k)}(\xi_i z)-\frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)}\big(H_{\nu+1}(\xi_i r)+H_{\nu-1}(\xi_i r)\big)P^{(k)}(\xi_i z)\Big\}E^b_{mik}\Big]$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_\nu\sin\nu\theta\cdot\frac{2\nu r^{\nu-1}}{b^{2\nu}-a^{2\nu}}\Big\{E^b_{mo1}+\Big(1-2\cdot\frac{z}{c}\Big)E^b_{mo2}\Big\}\qquad(13)$$

$$w=\frac{1}{2\pi c}\sum_{k=1}^{2}G_0^{(k)}(r)D_{ook}+\frac{1}{\pi b^2}\cdot\sum_i\frac{H_0(\xi_i r)}{\Theta_i^2}\sum_{k=1}^{2}\Big[-\frac{1}{\mu\xi_i}\Big\{\phi^{(k)}(\xi_i z)-\frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)}\big(\phi^{(k)}(\xi_i z)-\psi^{(k)}(\xi_i z)\big)\Big\}\gamma_{oik}$$
$$-\Big\{\phi^{(k)}(\xi_i z)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\big(\phi^{(k)}(\xi_i z)-\psi^{(k)}(\xi_i z)\big)\Big\}E^a_{oik}\Big]+\frac{1}{\pi c}\sum_m\cos Nz\sum_{k=1}^{2}\Big[-\frac{1}{2\mu(2\mu+\lambda)}\frac{1}{N}\Big\{F_0^{(k)}(Nr)\alpha_{onk}\Big\}$$
$$+\Big\{G_0^{(k)}(Nr)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}F_0^{(k)}(Nr)\Big\}D_{onk}-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\cdot\frac{1}{N}F_0^{(k)}(Nr)A_{onk}\Big]+\frac{1}{\pi c}\sum_\nu\cos\nu\theta\cdot\sum_{k=1}^{2}G_\nu^{(k)}(r)D_{mok}$$
$$+\frac{2}{\pi c}\sum_m\sum_\nu\cos\nu\theta\cdot\cos Nz\sum_{k=1}^{2}\Big[-\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\cdot\frac{1}{N}F_\nu^{(k)}(Nr)\alpha_{mnk}+\Big\{G_\nu^{(k)}(Nr)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}F_\nu^{(k)}(Nr)\Big\}D_{mnk}$$
$$-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\cdot\frac{1}{N}\cdot F_\nu^{(k)}(Nr)\big\{(\nu+1)A_{mnk}-(\nu-1)B_{mnk}\big\}\Big]+\frac{2}{\pi b^2}\sum_i\sum_\nu\cos\nu\theta\cdot\frac{H_\nu(\xi_i r)}{\Theta_i^2}\Big[-\frac{1}{\mu\xi_i}\Big\{\phi^{(k)}(\xi_i z)-\frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)}$$
$$\times\big(\phi^{(k)}(\xi_i z)-\psi^{(k)}(\xi_i z)\big)\Big\}\gamma_{mik}-\Big\{\phi^{(k)}(\xi_i z)-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\big(\phi^{(k)}(\xi_i z)-\psi^{(k)}(\xi_i z)\big)\Big\}\big(E^a_{mik}-E^b_{mik}\big)\Big]\qquad(14)$$

上式中

$\alpha_{mn1}=\mathbb{C}_m\mathbb{S}_n[(\sigma_r)_{r=b}]$，$\alpha_{mn2}=\mathbb{C}_m\mathbb{S}_n[(\sigma_r)_{r=a}]$，$\beta_{mn1}=\mathbb{S}_m\mathbb{S}_n[(\tau_{r\theta})_{r=b}]$，$\beta_{mn2}=\mathbb{S}_m\mathbb{S}_n[(\tau_{r\theta})_{r=a}]$，

$\gamma_{mi\frac{1}{2}}=\mathbb{H}_\nu\mathbb{C}_m[(\sigma_z)_{z=0}\pm(\sigma_z)_{z=c}]$，$E^a_{mi\frac{1}{2}}=\mathbb{H}_{\nu+1}[A_{mor}\pm A_{mcr}]$，$E^b_{mi\frac{1}{2}}=\mathbb{H}_{\nu-1}[B_{mor}\pm B_{mcr}]$，

$D_{mn1}=\mathbb{C}_m\mathbb{C}_n[w_{r=b}]$，$D_{mn2}=\mathbb{C}_m\mathbb{C}_n[w_{r=a}]$．$A_{mn1}=\frac{1}{b}A_{mnb}$，$A_{mn2}=\frac{1}{a}A_{mna}$，$B_{mnk}$も同様，

上式中の関数についても

$$G_\nu^{(k)}(Nr)=\frac{2}{b^2}\sum_i\frac{\xi_i}{N^2+\xi_i^2}\frac{H_\nu(\xi_i r)}{\Theta_i^2}(-1)^{k-1}b_kH_\nu(\xi_i b_k)=\frac{R_\nu^{(k)}(Nr)}{R_\nu^{(k)}(Nb_k)},\quad G_{\nu+1}^{(k)}(Nr)=\frac{2}{b^2}\sum_i\frac{N}{N^2+\xi_i^2}\frac{H_{\nu+1}(\xi_i r)}{\Theta_i^2}(-1)^{k-1}b_kH_\nu(\xi_i b_k)=\frac{R^{(k)}_{\nu+1,\nu}(Nr)}{R_\nu^{(k)}(Nb_k)},$$

$$G_{\nu-1}^{(k)}(Nr)=\frac{2\nu}{N}r^{\nu-1}\frac{(-1)^{k-1}b_k^{\nu}}{b^{2\nu}-a^{2\nu}}+\frac{2}{b^2}\sum_i\frac{N}{N^2+\xi_i^2}\frac{H_{\nu-1}(\xi_i r)}{\Theta_i^2}(-1)^{k-1}b_k H_{\nu-1}(\xi_i b_k)=\frac{R^{(k)}(Nr)}{R^{(k)}(Nb_k)},\quad b_1=b,\ b_2=a,\ b_0=a,$$

$$F_{\nu}^{(k)}(Nr)=\frac{4}{b^2}\sum_i\frac{N^2\xi_i}{(N^2+\xi_i^2)^2}\frac{H_\nu(\xi_i r)}{\Theta_i^2}(-1)^k b_k H_{\nu+1}(\xi_i b_k)=\frac{N}{\{R_\nu^{(k)}(Nb_k)\}^2}\left[R_\nu^{(k)}(Nb_k)\{rR_{\nu+1,\nu}^{(k)}(Nr)-b_{k-1}R_{\nu,\nu+1}^{(k)}(Nr)\}-R_\nu^{(k)}(Nr)\left\{\begin{matrix}b_kR_{\nu-1,\nu}^{(k)}(Nb_k)\\-b_{k-1}R_{\nu,\nu+1}^{(k)}(Nb_k)\end{matrix}\right\}\right]$$

$$F_{\nu+1}^{(k)}(Nr)=\frac{4}{b^2}\sum_i\frac{N\xi_i^2}{(N^2+\xi_i^2)^2}\frac{H_{\nu+1}(\xi_i r)}{\Theta_i^2}(-1)^k b_k H_{\nu+1}(\xi_i b_k)=\frac{N}{\{R_\nu^{(k)}(Nb_k)\}^2}\left[R_\nu^{(k)}(Nb_k)\{rR_\nu^{(k)}(Nr)-b_{k-1}R_{\nu+1}^{(k)}(Nr)\}-R_{\nu+1}^{(k)}(Nr)\{b_kR_{\nu-1}^{(k)}(Nb_k)-b_{k-1}R_{\nu,\nu+1}^{(k)}(Nb_k)\}\right]$$

$$F_{\nu-1}^{(k)}(Nr)=\frac{4}{b^2}\sum_i\frac{N\xi_i^2}{(N^2+\xi_i^2)^2}\frac{H_{\nu-1}(\xi_i r)}{\Theta_i^2}(-1)^k b_k H_{\nu+1}(\xi_i b_k)=\frac{N}{\{R_\nu^{(k)}(Nb_k)\}^2}\left[R_\nu^{(k)}(Nb_k)\{rR_\nu^{(k)}(Nr)-b_{k-1}R_{\nu-1}^{(k)}(Nr)\}-R_{\nu-1}^{(k)}(Nr)\{b_kR_{\nu+1}^{(k)}(Nb_k)-b_{k-1}R_{\nu,\nu-1}^{(k)}(Nb_k)\}\right]$$

$$R_\nu^{(k)}(Nr)=I_\nu(Nr)K_\nu(Nb_{k-1})-I_\nu(Nb_{k-1})K_\nu(Nr),\quad R_{ij}^{(k)}(Nr)=I_i(Nr)K_j(Nb_{k-1})+I_j(Nb_{k-1})K_i(Nr),$$

$$\left.\begin{matrix}\phi^{(1)}(\xi_i z)\\ \phi^{(2)}(\xi_i z)\end{matrix}\right\}=\frac{2}{c}\sum_n\frac{1-(-1)^n}{1+(-1)^n}\frac{\xi_i}{N^2+\xi_i^2}\cos Nz-\frac{2}{\xi_i c}=\frac{\sinh\xi_i(c-z)\mp\sinh\xi_i z}{\cosh\xi_i c\pm1},$$

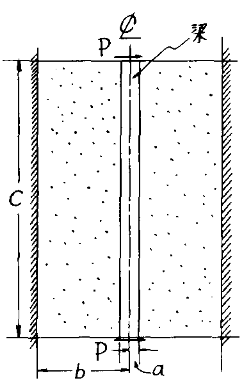
$$\left.\begin{matrix}\phi^{(1)}(\xi_i z)-\psi^{(1)}(\xi_i z)\\ \phi^{(2)}(\xi_i z)-\psi^{(2)}(\xi_i z)\end{matrix}\right\}=\frac{4}{c}\sum_n\frac{1-(-1)^n}{1+(-1)^n}\frac{N^2\xi_i}{(N^2+\xi_i^2)^2}\cos Nz=\phi(\xi_i z)-\frac{\xi_i z\cosh\xi_i(c-z)\mp\xi_i(c-z)\cosh\xi_i z}{\cosh\xi_i c\pm1},$$

$$\left.\begin{matrix}Q^{(1)}(\xi_i z)\\ Q^{(2)}(\xi_i z)\end{matrix}\right\}=\frac{2}{c}\sum_n\frac{1-(-1)^n}{1+(-1)^n}\frac{N}{N^2+\xi_i^2}\sin Nz=\frac{\cosh\xi_i(c-z)\pm\cosh\xi_i z}{\cosh\xi_i c\pm1},\quad\left.\begin{matrix}P^{(1)}(\xi_i z)\\ P^{(2)}(\xi_i z)\end{matrix}\right\}=\frac{4}{c}\sum_n\frac{1-(-1)^n}{1+(-1)^n}\frac{N\xi_i^2}{(N^2+\xi_i^2)^2}\sin Nz=\frac{\xi_i z\sinh\xi_i(c-z)\pm\xi_i(c-z)\sinh\xi_i z}{\cosh\xi_i c\pm1},$$

その他の関数については省略するが，同様の方法で求められている。（12）～（14）式中のα，β，等の係数は，境界条件を満足するように決められる積分定数である。また，（12）～（14）式から，各応力成分の一般式を誘導することが出来るが，ここでは省略する。

5. 数値計算

下図のような，外周が固定されており，内周が断面変形のない梁で拘束されている場合について，



解析する。上下対称とし，荷重は梁先端に作用する。この場合，梁のr，θ方向変位は，それぞれ，$u_\theta=u_0\cos\theta$，$v_t=-u_0\sin\theta$で与えられるので，$\nu=1$の場合についてのみ計算を行なえば良い。このとき，境界条件は，

i）．$r=b$で，$u=w=\tau_{r\theta}=0$

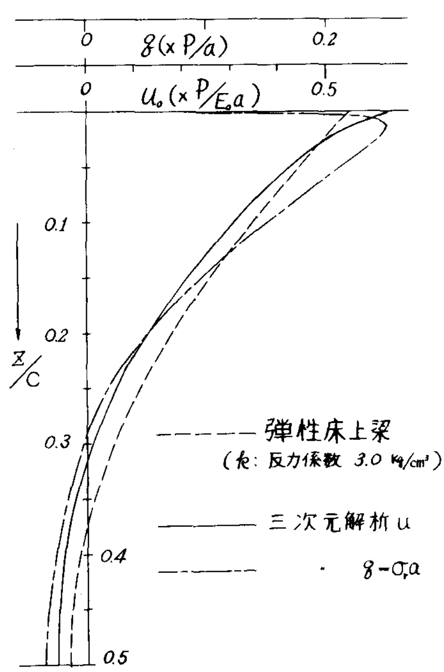
ii），$r=a$で，$u=u_b=u_0\cos\theta$，

$\tau_{r\theta}=\tau_{rz}=0$，

iii），$z=0$および$z=c$で，

$\sigma_z=\tau_{rz}=\tau_{\theta z}=0$，

$u_{z=0}=u_{z=c}$，$v_{z=0}=v_{z=c}$．



従って，$D_{mn1}=\beta_{mn1}=\beta_{mn2}=0$，$\gamma_{mi1}=\gamma_{mi2}=0$，$E_{mi2}^a=E_{mi2}^b=0$となる。計算結果を右図に示す。計算に用いた数値は，$a=25^{cm}$，$b=10a$，$c=10\pi a$，$E_b/E_0=800$，項数は，$i=24$，$n=52$，また図中の弾性床上梁としての値は，地盤反力係数$k=3.0^{kg}/_{cm^3}$としたときの値である。

（参考文献）

1）．S. G. Nomachi；On One Method of Solving Stress Problems in Cylindrical Co-ordinates by Means of Finite Fourier Hankel Transforms (Part I, II), Mem. of Muroran Ins. Tech. Vol. 3, No. 3, No. 4.

2）．能町純雄．松岡健一；円柱の三次元応力解析，第23回年次学術講演会．