

(株) 宮地鉄工所 正員 後藤茂夫
 (株) 宮地鉄工所 正員 大西幸紀
 (株) 宮地鉄工所 正員 ○羽根悟朗

I. 論文要旨

周知のようにトランスファー・マトリックス法は、多元の逆行列演算をさせているため計算機の記憶容量および演算時間の節約が可能とされており、格子桁の応力解析においてもこの特長を生かすべく、種々の解法が既に発表されている。しかし、いずれも固定荷重に対する解法であり、橋梁設計に必要な影響線を求めるに至っていない。

本論文は、各格間で断面一定、かつ直線の、曲げおよびねじり剛性をもつ主桁と、直線で曲げ剛性のみをもつ横桁からなる任意形格子桁の各種影響線を、トランスファー・マトリックス法により求める手法を示したものである。

II. 主桁の格間マトリックスおよび横桁の剛性マトリックス

曲げおよびねじりを受ける部材の断面力と変位を図-1のように表わせば、右端の諸量は左端の諸量によって、次のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_2 \\ \bar{\varphi}_2 \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l & -\frac{l^2}{2EI} & 0 & -\frac{l^3}{6EI} \\ & 1 & 0 & 0 & \frac{l}{GJ} & 0 \\ & & 1 & -\frac{l}{EI} & 0 & -\frac{l^2}{2EI} \\ & & & 1 & 0 & l \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{T}_1 \\ \bar{Q}_1 \end{bmatrix} \quad \text{--- (1)}$$

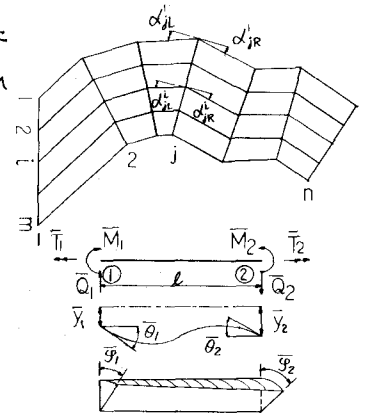


図-1

ここに EI : 曲げ剛性 GJ : ねじり剛性

さて、ここで後の演算のための個々の状態量を次のように無次元化する。

$$\begin{aligned}
 y &= \bar{y} \cdot E \cdot I_0 / P_0 l_0^3, & \varphi &= \bar{\varphi} \cdot E \cdot I_0 / P_0 l_0^2, & \theta &= \bar{\theta} \cdot E \cdot I_0 / P_0 l_0^2 \\
 M &= \bar{M} / P_0 l_0, & T &= \bar{T} / P_0 l_0, & Q &= \bar{Q} / P_0.
 \end{aligned}$$

ここに $E \cdot I_0$: 基準の曲げ剛性 P_0 : 基準荷重 l_0 : 基準長

横桁 $j-1 \sim j$ 間の主桁 i の j 端における状態量を、各々 $y_{i,j-1}^i, \varphi_{i,j-1}^i, \theta_{i,j-1}^i, M_{i,j-1}^i, T_{i,j-1}^i, Q_{i,j-1}^i$ とし、これらの $i = 1, 2, \dots, m$ とした要素より構成される列ベクトルを、各々 $y_{i,j-1}, \varphi_{i,j-1}, \theta_{i,j-1}, M_{i,j-1}, T_{i,j-1}, Q_{i,j-1}$ のように表わすと、式(1)を拡張したものは、式(2)となる。

$$W_{i,j-1} = A_j W_{i,j-1} \quad \text{--- (2)}$$

ここに $W_{i,j-1} = [y_{i,j-1} \ \varphi_{i,j-1} \ \theta_{i,j-1} \ M_{i,j-1} \ T_{i,j-1} \ Q_{i,j-1}]^*$

$$W_{i-1,i} = [y_{j-1,i} \quad \varphi_{j-1,i} \quad \theta_{j-1,i} \quad M_{j-1,i} \quad T_{j-1,i} \quad Q_{j-1,i}]^x$$

$$A_j = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{l} & -\mathbf{a} & \mathbf{0} & -\mathbf{b} \\ & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{c} & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{I} & -\mathbf{d} & \mathbf{0} & -\mathbf{a} \\ & & & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{l} \\ & & & & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ & & & & & \mathbf{I} \end{bmatrix}_j$$

a_j, b_j, c_j および d_j は、各々 $a_{ij} = (l_{ij}^2 / 2EI_{ij}) \cdot (E_0 I_0 / l_0^2)$, $b_{ij} = (l_{ij}^2 / 6EI_{ij}) \cdot (E_0 I_0 / l_0^3)$, $c_{ij} = (l_{ij} / 4J_{ij}) \cdot (E_0 I_0 / l_0)$ および $d_{ij} = (l_{ij} / EI_{ij}) \cdot (E_0 I_0 / l_0)$ において、 $i = 1, 2, \dots, m$ とし作成される対角マトリックス。また \mathbf{I} および $\mathbf{0}$ は、 m 行 m 列の単位マトリックスおよびゼロマトリックスであり、 \mathbf{l} は、 $l_{ij} / l_0, l_{2j} / l_0, \dots, l_{mj} / l_0$ よりなる対角マトリックスである。

ただし l_{ij} : 横桁 $i-1 \sim i$ 間の i 主桁の格間長
 EI_{ij} : 〃
 $4J_{ij}$: 〃
 x : 転置記号

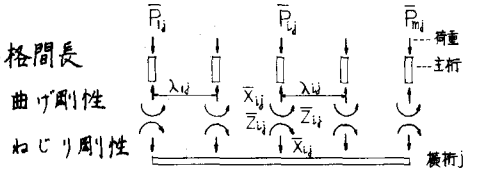


図-2

次に j 横桁に着目し、図-2のように主桁と横桁間に働く垂直力を \bar{X}_{ij} 、トルク(ベクトルとして横桁に直角方向)を \bar{Z}_{ij} 、主桁 $i \sim i+1$ 間の j 横桁の曲げ剛性と EI_{ij} とし、さらに $Z_{ij} = \bar{Z}_{ij} / P_0 l_0$, $X_{ij} = \bar{X}_{ij} / P_0$ と無次元化すれば、横桁のたわみ角 φ_{ij} 、たわみ y_{ij} と Z_{ij} , X_{ij} との関係は、結局式(3)で表わされ、これを式(4)のように略記する。

$$\begin{bmatrix} Z_{ij} \\ Z_{2j} \\ \vdots \\ Z_{mj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2R_{ij} & k_{ij} & & & \\ k_{ij} & 2(k_{ij} + k'_{2j}) & k'_{2j} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & k_{m-1,j} & 2k_{m-1,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{ij} \\ \varphi_{2j} \\ \vdots \\ \varphi_{mj} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -k'_{ij} & k'_{ij} & & & \\ -k'_{ij} & k'_{ij} - k'_{2j} & k'_{2j} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -k'_{m-1,j} & k'_{m-1,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{ij} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{ij} \\ X_{2j} \\ \vdots \\ X_{mj} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -k'_{ij} & -k'_{ij} & & & \\ k'_{ij} & k'_{ij} - k'_{2j} & -k'_{2j} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & k'_{m-1,j} & k'_{m-1,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{ij} \\ \varphi_{2j} \\ \vdots \\ \varphi_{mj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k'_{ij} & -k'_{ij} & & & \\ -k'_{ij} & k'_{ij} + k'_{2j} & -k'_{2j} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -k'_{m-1,j} & k'_{m-1,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{ij} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{bmatrix}$$

---- (3)a, (3)b

$$Z_{ij} = k_{ij} \varphi_{ij} - k'_{ij} y_{ij} \quad \text{---- (4)a}$$

$$X_{ij} = -k'_{ij} \varphi_{ij} + k'_{ij} y_{ij} \quad \text{---- (4)b}$$

ここに $k_{ij} = (2EI_{ij} / \lambda_{ij}) \cdot (l_0 / E_0 I_0)$, $k'_{ij} = (6EI_{ij} / \lambda'_{ij}) \cdot (l_0^2 / E_0 I_0)$,
 $k''_{ij} = (12EI_{ij} / \lambda''_{ij}) \cdot (l_0^3 / E_0 I_0)$

Ⅲ. 格点ベクトルおよび始端ベクトル

格点まわりのカ学量ベクトルを図-3のように分類する。 $w_{j,i-1}$, $w_{j,i+1}$ は、それぞれの主桁方向に準拠するものであり、 $w_{j,L}$, $w_{j,R}$ は、横桁の直角方向に準拠させることにする。従って、

$$c_{iL} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{iL}^1 \\ \cos \alpha_{iL}^2 \\ \vdots \\ \cos \alpha_{iL}^m \end{bmatrix}, \quad s_{iL} = \begin{bmatrix} \sin \alpha_{iL}^1 \\ \sin \alpha_{iL}^2 \\ \vdots \\ \sin \alpha_{iL}^m \end{bmatrix}$$

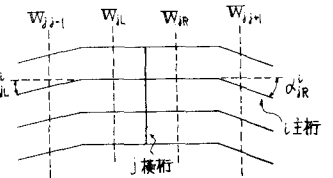


図-3

とおけば、

$$W_{iL} = B_{iL} W_{i-1} \quad \text{---- (5)}, \quad W_{i+1} = B_{iR} W_{iR} \quad \text{---- (6)}$$

$$\text{ここに } W_{iL} = [\varphi_{iL} \ \theta_{iL} \ Q_{iL}]^x, \quad B_{iL} = \begin{bmatrix} I & & & & \\ & c_{jL} & -s_{jL} & & \\ & s_{jL} & c_{jL} & & \\ & & & c_{jL} & -s_{jL} \\ & & & s_{jL} & c_{jL} \\ & & & & & I \end{bmatrix}$$

が成立する。また W_{iL} と W_{iR} との関係は、通常

$$W_{iR} = W_{iL} + [0' \ 0' \ 0' \ 0' \ Z_j \ X_j - P_j]^x \quad \text{---- (7)}$$

ここに 0 : m 行 1 列のゼロマトリックス

と表わされる故、マトリックス I_k を

$$I_k = \begin{bmatrix} 0 & \dots & I & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ I & & k & & 0 \end{bmatrix}^x$$

と定義すれば、式(4)を式(7)に代入して

$$W_{iR} = D_j W_{iL} - I_k P_j \quad \text{---- (8)}$$

$$\text{ここに } D_j = \begin{bmatrix} I & & & & & & \\ & I & & & & & \\ & & I & & & & \\ & & & I & & & \\ -k_j & k_j & & & I & & \\ k_j & -k_j & & & & I & \\ & & & & & & I \end{bmatrix}$$

となる。なお、横桁 j 上に支点またはヒンジがある場合、支点反力ベクトルおよびたわみ角の不連続量を表わすベクトルを、それぞれ式(10)、(11)のように定義し、さらに W_{iR} を一格間手前の W_{i-1R} と表わすことにすると、結局式(9)が成立する。

$$W_{iR} = K_j W_{i-1R} - I_k P_j + I_k R_j + I_3 W_j \quad \text{---- (9)}$$

$$\text{ここに } R_j = [R_{1j} \ R_{2j} \ \dots \ R_{mj}]^x \quad \text{--- (10)}, \quad W_j = [w_{1j} \ w_{2j} \ \dots \ w_{mj}]^x \quad \text{--- (11)}$$

$$K_j = D_j B_{jL} A_j B_{j-1R}$$

次に、始端におけるベクトル W_{iL} のうち、未知ベクトル φ_{iL} , θ_{iL} および Q_{iL} を

$$Y = [\varphi_{iL} \ \theta_{iL} \ Q_{iL}]^x \quad \text{---- (12)}$$

とおくと、式(9)より次式が成立する。

$$W_{iR} = K'_j Y - I_k P_j \quad \text{---- (13)}$$

$$\text{ここに } K'_j = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & k_j & -k'_j \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}^x$$

IV. 未知ベクトルに関する連立方程式

中間支点の位置を P, Q, \dots, R ヒンジ点の位置を u, v, \dots, w のように当該横桁番号で表わすと、未知ベクトルとしては、 $Y, R_P, R_Q, \dots, R_R, W_u, W_v, \dots, W_w$ などと考えることになる。いま、式(9)の W_{iR} を始端ベクトル Y で表わせば、式(13)を考慮して

$$W_{iR} = \varphi_j Y - I_k P_j - \varphi_{j-1} I_k P_{j-1} - \varphi_{j-2} I_k P_{j-2} - \dots - \varphi_{j-1} I_k P_j + \varphi_{j-1} I_k R_P + \dots + \varphi_{j-1} I_k W_u + \dots (14)$$

$$\text{ここに } \bar{G}_j = K_j K_{j-1} K_{j-2} \dots K_2 K_1, \quad \tilde{G}_{j,k} = K_j K_{j-1} K_{j-2} \dots K_{k+1}$$

となる。

求める連立方程式は、式(14)に(i)終端($j=n$)において、第1, 第4, 第5行ベクトルがゼロ(ii)中間支点($j=p, q, \dots, r$)において、第1行ベクトルがゼロ(iii)ヒンジ点($j=u, v, \dots, w$)において、第4行ベクトルがゼロ という条件を与えれば、式(15)のように得られる。

\bar{G}	\bar{G}_r	...	\bar{G}_q	\bar{G}_p	\tilde{G}_w	...	\tilde{G}_v	\tilde{G}_u	Y
$G_{r:1}$	0	...	$G_{r:q:16}$	$G_{r:p:16}$	$G_{r:w:13}$...	$G_{r:v:13}$	$G_{r:u:13}$	R_r
$G_{q:1}$	0	...	0	$G_{q:p:16}$	$G_{q:w:13}$...	$G_{q:v:13}$	$G_{q:u:13}$	R_q
$G_{p:1}$	0	...	0	0	$G_{p:w:13}$...	$G_{p:v:13}$	$G_{p:u:13}$	R_p
$G_{w:4}$	$G_{w:r:46}$...	$G_{w:q:46}$	$G_{w:p:46}$	0	...	$G_{w:v:43}$	$G_{w:u:43}$	W_w
$G_{v:4}$	$G_{v:r:46}$...	$G_{v:q:46}$	$G_{v:p:46}$	0	...	0	$G_{v:u:43}$	W_v
$G_{u:4}$	$G_{u:r:46}$...	$G_{u:q:46}$	$G_{u:p:46}$	0	...	0	0	W_u

$$= \begin{bmatrix} \bar{G}_1 & \bar{G}_2 & & & & & & & & \bar{G}_{n-1} & 0 \\ G_{r1:16} & G_{r2:16} & & & & G_{r:r-1:16} & 0 & & & 0 & 0 \\ G_{q1:16} & G_{q2:16} & & & G_{q:q-1:16} & 0 & & & & 0 & 0 \\ G_{p1:16} & G_{p2:16} & & & G_{p:p-1:16} & 0 & & & & 0 & 0 \\ G_{w1:46} & G_{w2:46} & & & & G_{w:w-1:46} & 0 & & & 0 & 0 \\ G_{v1:46} & G_{v2:46} & & & & G_{v:v-1:46} & 0 & & & 0 & 0 \\ G_{u1:46} & G_{u2:46} & & & & G_{u:u-1:46} & 0 & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \end{bmatrix} \quad \text{--- (15)}$$

$$\text{ここに } \bar{G}_j = \begin{bmatrix} G_{j:1} \\ G_{j:2} \\ G_{j:6} \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_{j,k} = \begin{bmatrix} G_{j:k:11} & G_{j:k:12} & \dots & G_{j:k:16} \\ G_{j:k:21} & G_{j:k:22} & \dots & G_{j:k:26} \\ G_{j:k:61} & G_{j:k:62} & \dots & G_{j:k:66} \end{bmatrix}$$

$$\bar{G} = [G_{n:1} \ G_{n:4} \ G_{n:5}]^x, \quad \bar{G}_k = [G_{n:k:16} \ G_{n:k:46} \ G_{n:k:56}]^x, \quad \tilde{G}_k = [G_{n:k:13} \ G_{n:k:43} \ G_{n:k:53}]^x$$

従って、式(15)を解いて未知ベクトル $[Y \ R_r \ \dots \ R_p \ W_w \ \dots \ W_u]^x$ を求め

、式(14)に代入すれば、逐次格点ベクトルが求まることになる。

なお、支点に不等沈下がある場合は、支点沈下量ベクトル δ_p を

$$\delta_p = [\delta_{p1} \ \delta_{p2} \ \dots \ \delta_{m8}]^x$$

と定義すれば、式(15)の右辺を

$$\begin{bmatrix} I' \delta_n - G'_1 \delta_1 \\ \delta_r - G_{r:11} \delta_1 \\ \delta_p - G_{p:11} \delta_1 \\ \vdots \\ -G_{w:41} \delta_1 \\ \vdots \\ -G_{u:41} \delta_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ただし } \delta_{ip} = \bar{\delta}_{ip} \cdot (E_0 I_0 / P_0 L_0^3)$$

$$I' = [I \ 0 \ 0]^x, \quad G'_1 = [G_{n:11} \ G_{n:41} \ G_{n:51}]^x$$

として計算すればよいことが容易にわかる。

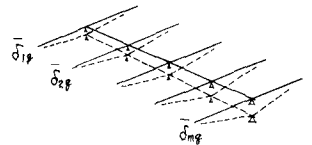


図-4