

熊本大学 工学部  
同上

正員  
学生員

三池 亮次  
○石田 寛生

1, 要旨 骨組構造を、幾つかの部分構造に分割し、その中の任意の部分構造の両側切断面における状態ベクトルを、変形法基礎式から誘導されるブロック遷移マトリックスによって、相互に連結して解析を行うブロック遷移マトリックス法については、骨組構造を解析する際に有効な手法として、すでに発表のとおりである。<sup>1)</sup>

ここでは、とくにピントラスにおいて、ブロック遷移マトリックスを誘導する過程に生ずる特異の問題に注目し、特異の生ずるトラス骨組形状、それが発生する物理的意味、また特異問題を除去するための手法等について検討を行った。

2, 遷移マトリックスの正則の条件

任意の部分構造Bの切断面1に作用する外力を  $P^B$  (切断面に作用する外力は、すべて1側の節点に作用するものとする。) 変位を  $d_1^B$ , 接続する部分構造からの反力を  $R_1^B$ , また切断面1, 2以外の構造節点に作用する外力を  $P_2^B$ , 変位を  $d_2^B$  とし、切断

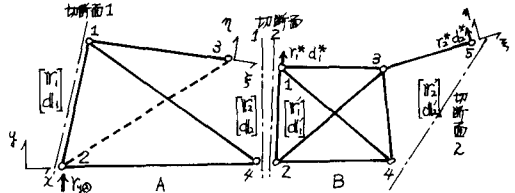


図-1 部分構造の骨組形状

面2についてはそれぞれ添字2をつければ、部分構造Bの剛性マトリックス  $K^B$  に対して、

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{10} & K_{12} \\ K_{01} & K_{00} & K_{02} \\ K_{21} & K_{20} & K_{22} \end{bmatrix}^B \begin{bmatrix} d_1^B \\ d_0^B \\ d_2^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^B \\ 0 \\ R_2^B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1^B \\ P_2^B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

が成立する。(1)式より  $d_0^B$  を消去すれば、(以下添付Bを省略)

$$\begin{bmatrix} R_1^B \\ R_2^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K_{11} - K_{10}K_{00}^{-1}K_{01}) & (K_{12} - K_{10}K_{00}^{-1}K_{02}) \\ (K_{21} - K_{20}K_{00}^{-1}K_{01}) & (K_{22} - K_{20}K_{00}^{-1}K_{02}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^B \\ d_2^B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{10}K_{00}^{-1}P_0 - P_1^B \\ K_{20}K_{00}^{-1}P_0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

を得る。上式は、分割による任意の部分構造における解析の基礎式である。(2)式を、両切断面における状態ベクトルが対応する様に変形すれば、

$$\begin{bmatrix} (K_{12} - K_{10}K_{00}^{-1}K_{02}) & 0 \\ (K_{22} - K_{20}K_{00}^{-1}K_{02}) & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2^B \\ R_2^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(K_{11} - K_{10}K_{00}^{-1}K_{01}) & I \\ -(K_{21} - K_{20}K_{00}^{-1}K_{01}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^B \\ R_1^B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{10}K_{00}^{-1}P_0 - P_1^B \\ K_{20}K_{00}^{-1}P_0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

上式において、状態ベクトル  $S_1 = [d_1^B, R_1^B]^T$ ,  $S_2 = [d_2^B, R_2^B]^T$  にかかる係数マトリックスを、それぞれ  $G_1, G_2$  とすれば(3)式は、

$$G_2 \cdot S_2 = G_1 \cdot S_1 + C, \quad \text{あるいは} \quad S_2 = G_2^{-1} \cdot G_1 \cdot S_1 + G_2^{-1} \cdot C \quad (4)$$

となり、遷移マトリックス  $G = G_2^{-1} \cdot G_1$  が正則であるためには、 $G_2$  が正則であること、したがって、 $K_2 = (K_{22} - K_{20}K_{00}^{-1}K_{02})$  が正則であることが、必要かつ十分な条件となる。それ故、切断面1と2における節点数を等しくとり、 $K_2$  を正方行列にすることはもちろんであるが、以下に  $K_2$  の物理的意味を考察し

て、 $C_2$ が特異となる一般条件と、その理由を明らかにする。

3, 特異となる場合の一般条件と、解析基礎式の誘導

(3), (4)式において、 $C_1 = 0$ ,  $d_1 = 0$ すなわち、ある部分構造に外力が作用せず、かつ切断面1を固定した場合 ( $R_2 \neq 0$ であっても良い)。

$$K_s \cdot d_2 = R_1 \quad (5)$$

を得るが、切断面2の変位より切断面1の節点力が求まっても、その逆、すなわち  $R_1$  から一義的に  $d_2$  を決定することが出来なるとき、 $K_s$ は特異となる。

たとえば、図-1に示すトラス構造A、及びBにおいて切断面1を固定すると、

(i) トラス構造Bにおいて、切断面2の③節点における③-⑤部材軸に垂直方向の力となる変位  $d_2^*$  が生じてても、切断面1の反力  $R_1 = 0$  であるので、 $K_s$ は特異となる。

(ii) トラス構造Aにおいて、切断面2の変位  $d_2$ の如何にかかわらず、①-②は固定されているので切断面1の②節点における②-④部材軸に垂直方向の反力  $R_{20} = 0$  となるため、 $K_s$ は特異となる。

すなわち切断により構造上不安定な部材が生ずる場合や、切断面1における節点で、それが二本以下の部材で構成されている場合に、特異問題が生ずるものと思われる。

(ii)の場合においては  $R_{20}$ は切断面それ自身の状態ベクトルに依存するため、特異問題の解消には、図-1において、破線で示す②-③部材の追加が必要であろう。

(i)の場合、トラス構造Bの切断節点④、⑤の変位及び反力を、各々、A構造の①-③部材、B構造の③-⑤部材の部材軸及びそれに垂直方向にとり、その垂直方向の反力、及び変位を、節点④においては  $r_1^*$ ,  $d_1^*$ 、節点⑤においては  $r_2^*$ ,  $d_2^*$ とする。またそれ以外の反力、及び変位を、切断面1, 2に対して、それぞれ  $(R_1', d_1')$ ,  $(R_2', d_2')$ とすれば、トラス構造Bにおける解析の基礎式は、次の様な条件を満足する。

(i)  $d_2^*$ の変位により、反力  $R_1'$ ,  $R_2'$ ,  $r_1^*$ ,  $r_2^*$ は何らの影響も受けないから、 $d_2^*$ にガかる係数は、すべて零である。

(ii)  $d_1'$ ,  $d_2'$ ,  $d_1^*$ ,  $d_2^*$ の変位の如何にかかわらず、 $r_2^* = 0$ であるから、 $r_2^*$ に対応する  $d$ の項にガかる係数、及び荷重項  $C_2^* = 0$ である。

(iii) ④節点の反力  $r_1^* = 0$ である。

これらの条件により、解析の基礎式は、

$$\begin{bmatrix} r_1' \\ r_2' \\ r_1^* \\ r_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_e & K_{e21} \\ \dots & \dots \\ K_{e1e}^* & K_{e1e}^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1' \\ d_2' \\ d_1^* \\ d_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_1^* \\ C_2^* \end{bmatrix} \quad (6)$$

となる。これより  $r_2^*$ ,  $d_2^*$ ,  $C_2^*$ と、それに対応する係数マトリックスの要素を取り除けば、(6)式は、次の様に変形することが出来る。

$$\begin{bmatrix} K_e \\ r_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_e & K_{e21}^* \\ K_{e1e}^* & K_{e1e}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_e \\ d_1^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_e \\ C_1^* \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここに、 $K_e^t = [K_e^t, K_{21}^t]$   $d_e^t = [d_1^t, d_2^t]$   $C_e^t = [C_1^t, C_2^t]$  である。

(7)式を、 $r_i^* = 0$ の条件の下に解き、 $d_i^*$ を消去すれば、次の様に部分構造解析の基礎式を得る。

$$r_i^* = k_{ie}^* \cdot d_e + k_{ii}^* \cdot d_i + C_i^*$$

$$d_i^* = -\frac{1}{k_{ii}^*} (k_{ie}^* \cdot d_e + C_i^*)$$

$$\therefore r_e = (k_e - \frac{1}{k_{ii}^*} k_{ei}^* \cdot k_{ei}^{*t}) \cdot d_e + (C_e - \frac{C_i^*}{k_{ii}^*} \cdot k_{ei}^*) \quad (8)$$

(8)式は、(2)式に対応し、これより遷移マトリックスを誘導することができる。

#### 4. 切断面における部材が基準座標軸に斜交する場合の剛性マトリックス<sup>2)</sup>

ブロック切断面における不安定部材の部材軸と、基準座標の方向が一致しない場合には、前述の条件を満足する剛性マトリックスを得る事はできない。したがって、任意の骨組形状によるトラスの解析においては、部材両端において一般に異なった基準座標を用いた方法が必要となる。ピン結トラス部材には、図-2に示すように軸力 $\bar{P}_{ij}$ のみが作用するが、 $i$ - $j$ 部材の $i$ 及び $j$ 節点における節点力、 $R_{ij}$ 、 $R_{ji}$ は、 $i$ - $j$ 部材の $i$ 点における方向余弦を $t_{\xi ij i}$ 、 $j$ - $i$ 部材の $j$ 点における方向余弦を $t_{\xi ji j}$  (ただし、 $i$ - $j$ 部材の方向とは、 $i$ 点より $j$ 点に向かう $i$ 点における接線方向)とすれば、

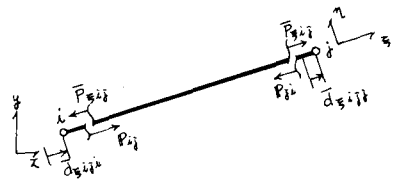


図-2 座標及び記号の約束

$$R_{ij} = t_{\xi ij i} \cdot \bar{P}_{ij} \quad R_{ji} = t_{\xi ji j} \cdot \bar{P}_{ij} \quad (9)$$

が成立する。今、 $i$ - $j$ 部材が直線で、同一断面を持ち、また部材軸方向の、 $i$ 、 $j$ 両端における変位をそれぞれ $\bar{d}_{\xi ij i}$ 、 $\bar{d}_{\xi ji j}$ とすれば、

$$\bar{P}_{ij} = (EA/L)_{ij} (-\bar{d}_{\xi ij i} + \bar{d}_{\xi ji j}) \quad (10)$$

$$\bar{P}_{ji} = (EA/L)_{ij} (-\bar{d}_{\xi ji j} + \bar{d}_{\xi ij i})$$

となり、(9)、(10)両式より、

$$R_{ij} = -(EA/L)_{ij} \cdot t_{\xi ij i} \cdot (\bar{d}_{\xi ij i} - \bar{d}_{\xi ji j}) \quad (11)$$

$$R_{ji} = -(EA/L)_{ij} \cdot t_{\xi ji j} \cdot (\bar{d}_{\xi ji j} - \bar{d}_{\xi ij i})$$

の様に変形することができる。

それぞれの基準座標系に対する、 $i$ 、 $j$ 点の変位をそれぞれ $d_i$ 、 $d_j$ とすると、

$$\bar{d}_{\xi ij i} = t_{\xi ij i}^{(t)} \cdot d_i \quad \bar{d}_{\xi ji j} = t_{\xi ji j}^{(t)} \cdot d_j \quad (12)$$

$$\bar{d}_{\xi ji i} = t_{\xi ji i}^{(t)} \cdot d_j \quad \bar{d}_{\xi ij j} = t_{\xi ij j}^{(t)} \cdot d_i$$

(12)式を(11)式に代入した結果を、マトリックス表示すると、

$$\begin{bmatrix} R_{ij} \\ R_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{iji} & K_{ijj} \\ K_{jii} & K_{jjj} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_i \\ d_j \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\text{ここに、} K_{iji} = -(EA/L)_{ij} (t_{\xi ij i} \cdot t_{\xi ij i}^{(t)})$$

$$K_{ijj} = K_{jii} = (EA/L)_{ij} (t_{\xi ij i} \cdot t_{\xi ji j}^{(t)})$$

$$K_{jii} = -(EA/L)_{ij} (t_{\xi ji j} \cdot t_{\xi ji j}^{(t)})$$

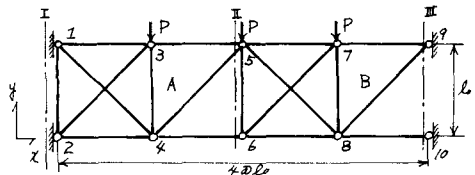


図-3 解析モデルと載荷状態  $P/P_0 = A/A_0 = E/E_0 = 1$

となる。この様にして、任意部材 $i$ - $j$ において両端で異なる基準座標を用いた剛性マトリックスを、誘導することができる。(6)式に対応し、各条件を満足する基礎式を求めることができる。

#### 5. 適用計算例

上記の手法を用いて、図-3に示すモデルについて電子計算を行ったため

その結果を紹介する。部分構造A、Bの剛性マトリックスに、(2)式の変形を施し、(6)式に対応する

次式を得る。

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 = \frac{1}{10} \\ X_5 \\ Y_5 \\ X_6 \\ Y_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +6.31 & -1.31 & -1.31 & 0 & -3.69 & +1.31 & -1.31 & 0 \\ & +11.74 & +0.435 & -1.09 & -0.435 & -0.871 & +1.31 & 0 \\ & & +8.05 & +1.74 & -3.04 & -2.18 & -3.69 & 0 \\ & & & +11.74 & -1.74 & -0.871 & 0 & 0 \\ & \text{SYM.} & & & +8.05 & +2.18 & -1.31 & 0 \\ & & & & & -1.74 & -1.31 & 0 \\ & & & & & & +6.31 & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 + \frac{1}{10} \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.00 \\ +2.90 \\ +4.20 \\ +4.20 \\ +7.69 \\ +2.90 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_B = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -5.00 \\ +12.90 \\ +4.20 \\ +4.20 \\ +7.69 \\ +2.90 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

部分構造 A, B においては、荷重項のみが異なるので、B においては、荷重項  $C_B$  のみを示した。  
 この後、(8)式、(3)式、(4)式と対応する様に順に変形を施し、圧縮された遷移マトリックスは、

$$\begin{bmatrix} u_9 \\ v_9 \\ u_{10} \\ X_9 \\ Y_9 \\ X_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1.00 & +14.21 & 0 & -5.26 & -12.84 & -1.26 \\ -4.00 & -23.24 & +4.00 & +11.30 & +21.33 & -4.70 \\ 0 & -17.79 & +1.00 & +2.05 & +15.85 & -1.95 \\ 0 & +8.00 & 0 & -1.83 & -7.17 & -0.828 \\ 0 & +2.00 & 0 & -0.207 & -1.79 & -0.207 \\ 0 & -8.00 & 0 & +0.828 & +7.17 & -0.171 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +3.94 \\ +7.23 \\ -6.74 \\ +5.17 \\ +2.79 \\ -5.17 \end{bmatrix}$$

あるいは

$$\begin{bmatrix} d_2 \\ r_2 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ r_1 \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix}$$

である。ここで境界条件  $d_1^A = 0$ ,  $d_2^B = 0$  を代入して、

$$r_1^A = -(G_{12})^{-1} \cdot C_{11} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.56 \\ +0.81 \\ +1.44 \\ +0.82 \end{bmatrix} \times \frac{E_0 A_0}{P_0 L_0}$$

$$r_2^B = G_{22} \cdot r_1^A + C_{21} = \begin{bmatrix} X_9 \\ Y_9 \\ X_{10} \\ Y_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1.06 \\ +1.37 \\ -0.94 \\ 0.00 \end{bmatrix} \times \frac{E_0 A_0}{P_0 L_0}$$

となり、両端における状態ベクトルが求まった。

### 6. 結び

部分構造に分割して、不安定部材が生ずる場合の上述の解法は、(2)式に基づいて行われる部分構造による解法、および直列消去法による解法においても有効であろう。

また、有限要素解析に、遷移マトリックス法を適用する場合に、切断如何によつては、§3, (ii)の型の、特異の問題が生ずるのである。

### 参考文献

- 1) 吉村虎蔵 三池亮次 宮村重範 吉村健 “群遷移マトリックスによる骨組構造解析”  
土木学会 第25回 年次学術講演会、昭和54年 11月8日。
- 2) 三本木茂夫 吉村信敏 共著 “有限要素法による構造解析プログラム” 日本鋼構造協会編、培風館。
- 3) R. K. Livesley 著 山田嘉昭 川井忠彦 共訳 “マトリックス構造解析入門” 培風館。