## I-40　伝達マトリクス法による曲線構造物の解析

九州工業大学　正会員　山本　宏

**1. まえがき**　ここでは，円弧部材によって構成される構造物の解析のための基本式を示すが，ここに言う円弧部材とは，その材軸が一平面内で円弧をなし，かつ材軸を含む面に直角な方向から荷重が作用するものとする。またねじりモーメントが作用する場合，ソリの影響は無視することができるものとする。以下には，このような構造に対する基本式を示すが，直線は円弧の特別な場合であると考えれば，円弧部材の基本式は直線部材の式をも含む。

**1-1. 部材座標系**……部材の任意点に接線，法線および材軸を含む平面に直角な方向を考え，これを部材座標系にえらび，図-1に示す方向を正とする。

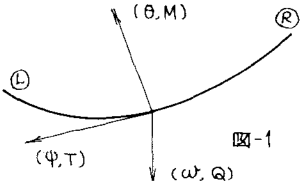


図-1

**1-2. 節点力と節点変位**……Ⓡ端：せん断力Qは座標軸の正方向に作用するものを正，曲げおよびねじりモーメントM，Tは座標軸の正方向に向いて時計回りのものを正とし，変位（ω，θ，ψ）は，それに共役な節点力と同じ向きをもつ場合を正とする。　Ⓛ端：Qは座標軸の負方向のものを正，M，Tは軸の負方向に向いて時計回りのものを正とし，変位は軸の正方向に変位する場合，軸の正方向に向いて時計回りに回転する場合を正とする。

**2. 基本式**　図-2の場合について以下の式が得られる。

$$\frac{dQ}{ds}=q,\quad \frac{dM}{ds}-\frac{T}{R}-Q=0,\quad \frac{M}{R}-\frac{dT}{ds}=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\frac{d^6\omega}{d\varphi^6}+2\frac{d^4\omega}{d\varphi^4}+\frac{d^2\omega}{d\varphi^2}=-\frac{R}{EI}\left(\frac{q}{\lambda}-\frac{d^2q}{d\varphi^2}\right) \quad \cdots\cdots(2)$$

$\frac{GJ}{EI}=\lambda$

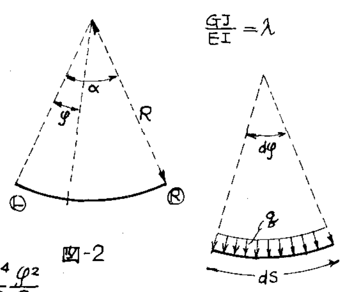


図-2

式(2)の一般解は，

$$\omega=C_1+C_2\varphi+C_3\sin\varphi+C_4\varphi\cdot\sin\varphi+C_5\cos\varphi+C_6\cdot\varphi\cdot\cos\varphi-\frac{qR^4}{\lambda EI}\frac{\varphi^2}{2}$$

$C_1$, $C_2$, ……, $C_6$は境界条件からきめられる。　これらの式をもとにして，円弧部材のField Transfer Equationを次のように求めることができる。

$$\begin{bmatrix}\omega\\ \bar\theta\\ \bar\psi\\ M\\ T\\ Q\\ 1\end{bmatrix}^R=\begin{bmatrix}1 & -\sin\alpha & 1-\cos\alpha & -\frac{R^2}{2GJ}A & -\frac{R^2}{2GJ}D & \frac{R^3}{2GJ}F & \omega_0^R\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & -\frac{R^2}{2GJ}B & -\frac{R^2}{2GJ}C & \frac{R^3}{2GJ}A & \bar\theta_0^R\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & -\frac{R^2}{2GJ}C & -\frac{R^2}{2GJ}E & -\frac{R^3}{2GJ}D & \bar\psi_0^R\\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & R\cdot\sin\alpha & M_0^R\\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & R(1-\cos\alpha) & T_0^R\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & Q_0^R\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega\\ \bar\theta\\ \bar\psi\\ M\\ T\\ Q\\ 1\end{bmatrix}^L \quad \cdots\cdots(3)$$

$\bar\theta=R\cdot\theta$

$\bar\psi=R\cdot\psi$

$\omega_0^R$, $\bar\theta_0^R$ … etc；荷重項

$$A=2(1-\cos\alpha)-\alpha(1+\lambda)\sin\alpha,\quad C=\alpha(1+\lambda)\sin\alpha,\quad F=-2(\alpha-\sin\alpha)+(1+\lambda)\sin\alpha-\alpha(1+\lambda)\cos\alpha$$
$$B=(1+\lambda)(\sin\alpha+\alpha\cos\alpha)-2\sin\alpha,\quad D=(1+\lambda)(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha),\quad E=(1-\lambda)\sin\alpha+\alpha(1+\lambda)\cos\alpha \quad \cdots\cdots(4)$$

式(3)の正方マトリクスが Field Transfer Matrix であるが，式(3)の極限値を求めれば直線部材の場合の式が得られる。たとえば，$\lim_{\alpha\to0}\left(-\frac{R^2}{2GJ}A\right) = \frac{\ell^2}{2EI}$，$\lim_{\alpha\to0}\left(-\frac{R^3}{2GJ}F\right) = \frac{\ell^3}{6EI}$ などである。

つぎに式(3)を変形すると部材両端における断面力と変位の関係式を求めることができる。すなわち

$$
\begin{bmatrix} M^L \\ T^L \\ Q^L \\ \hline M^R \\ T^R \\ Q^R \end{bmatrix}
= -\frac{2GJ}{R^2}
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
H & K & O & -H & V & -N \\
I & L & P & -I & N & -U \\
J'/R & H/R & I/R & -J'/R & H/R & -I/R \\
\hline
-H & M & S & H & K & L \\
I & N & U & -I & O & P \\
J'/R & H/R & I/R & J'/R & H/R & -I/R
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} \omega^L \\ \bar{\theta}^L \\ \bar{\varphi}^L \\ \hline \omega^R \\ \bar{\theta}^R \\ \bar{\varphi}^R \end{bmatrix}
\qquad \cdots\cdots (5)
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
&H = 2(1-\cos\alpha)[\alpha(1+\lambda)-(1-\lambda)\sin\alpha]/G, \qquad J' = -[\alpha^2(1+\lambda)^2-(1-\lambda)^2\sin^2\alpha]/G \\
&I = -(1-\lambda)[\alpha^2(1+\lambda) - 2\alpha\cdot\sin\alpha + (1-\lambda)\sin^2\alpha]/G, \qquad N = 2(1+\lambda)[-\alpha^2\sin\alpha + (1-\cos\alpha)(\alpha+\sin\alpha)]/G \\
&K = -2[\alpha^2(1+\lambda) + \alpha(1-\lambda)\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2\sin^2\alpha]/G, \qquad V = 2[\alpha^2(1+\lambda)\cos\alpha + \alpha(1-\lambda)\sin\alpha - 2\sin^2\alpha]/G \\
&L = 2[(1-\lambda)(1-\cos\alpha)(\alpha-\sin\alpha) + (\alpha\cdot\sin\alpha + 2\cos\alpha - 2)\sin\alpha]/G \\
&M = 2[-\alpha^2(1+\lambda)\cos\alpha + \alpha\cdot\sin\alpha(2\lambda - 2\lambda\cos\alpha + \lambda\cos^2\alpha - 1) + 2\sin^2\alpha]/G \qquad \cdots\cdots (6) \\
&O = 2[\alpha\{(1-\lambda)\sin^2\alpha + (1+\lambda)(1-\cos\alpha)\} - (3-\lambda)(1-\cos\alpha)\cdot\sin\alpha]/G \\
&P = [(1+\lambda)\{-\alpha^2(3+\lambda) + 4\alpha\sin\alpha + (1+\lambda)\sin^2\alpha\} + 2\cos\alpha\{\alpha(1-\lambda)\sin\alpha - 4(1-\cos\alpha)\}]/G \\
&S = 2(1-\cos\alpha)\left[(1+\lambda)\left(\alpha^2\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} - \alpha - \sin\alpha\right) + \alpha\lambda\cdot(1-\cos\alpha)\cos\alpha\right]/G \\
&U = [-\alpha^2(1+\lambda)(1+\lambda+2\cos\alpha) + 2\alpha(3+\lambda)\sin\alpha - 8(1-\cos\alpha) + (1+\lambda)^2\sin^2\alpha]/G \\
&G = 2[\alpha(1+\lambda)\{\alpha^2(1+\lambda) - 4(1-\cos\alpha)\} - (1-\lambda)\sin\alpha\{\alpha(1-\lambda)\sin\alpha - 4(1-\cos\alpha)\}]
\end{aligned}
$$

式(5)の極限値は直線部材の式に他ならない。 たとえば，$\lim_{\alpha\to0}\left(-\frac{2GJ}{R^2}H\right) = -\frac{6EI}{\ell^2}$，$\lim_{\alpha\to0}\left(\frac{2GJ}{R^2}K\right) = \frac{4EI}{\ell}$ などである。

これらの式を用いて，全体座標系，適合条件，釣合条件を考えれば，Point Transfer Equation を求めることができる。 たとえば，円弧格子げたの場合には，

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_m \\ 1 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 & O & O & \cdots & O & \mathbf{Q}_{01} \\
\mathcal{B}_1' & \mathcal{A}_2 & \mathcal{B}_2 & O & \cdots & O & \mathbf{Q}_{02} \\
O & \mathcal{B}_2' & \mathcal{A}_3 & \mathcal{B}_3 & \cdots & O & \mathbf{Q}_{03} \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\
O & O & \cdots & \cdots & \cdots & \mathcal{A}_m & \mathbf{Q}_{0m} \\
O & O & \cdots & \cdots & \cdots & O & 1
\end{bmatrix}
\qquad \cdots\cdots (7)
\qquad
\mathbf{V}_j = \begin{bmatrix} \omega \\ \bar{\theta} \\ \bar{\varphi} \\ M \\ T \\ Q \end{bmatrix}_j
$$

$$
\mathcal{A}_j = \begin{bmatrix} I & O \\ \bar{K}_{22}^{aj} - \bar{K}_{11}^{aj+1} & I \end{bmatrix}, \quad
\mathcal{B}_j = \begin{bmatrix} O & O \\ -\bar{K}_{12}^{aj+1} & O \end{bmatrix}, \quad
\mathcal{B}_{j-1}' = \begin{bmatrix} O & O \\ \bar{K}_{21}^{aj} & O \end{bmatrix}
\qquad \cdots\cdots (8)
$$

これは，式(3)による Field Transfer Equation によって伝達される。

円弧部材に対する基本式を用いて，円弧構造物の解析を行なうことができる。先に述べたように，円弧部材の式は直線部材の式を含むので，直線部材に対してはマトリクス要素の極限値を用いることとすれば，円弧構造物の解析式は直線構造物にも用いることができ，さらに，円弧部材に対してはそのαとλに対する値，直線部材には極限値を使用すれば，円弧部材と直線部材の併用になる構造物を解くことができる。