I-38　マトリックス法による骨組解析の一考察

センチュリリサーチセンタ(株)　正員　武田洋
〃　〃　○渡辺隆之

1. まえがき

マトリックス構造解析法の起源は，梁または柱のような一次元的部材の結合からなる構造物を解析した骨組構造の解析に立脚している。骨組解析法の推移を顧みると，過去におけるたわみ角法から現在では一般的になっている変位法（変形法）へと手法および精度の改良が行なわれ，種々の骨組構造がこの方法で計算されていることは周知のとおりである。しかし実際の骨組解析を行なうのに際して，梁の図心軸（または梁の軸）が不連続である変断面材を有している構造物をしばしば見受けるが，これらの解析において図心軸の不連続性に考慮が払われない場合が多い。この不連続性について厳密に考察した場合，骨組の"偏心した結合"という考えが生じる。この小論では，この種の取り扱い方法の理論概要にふれ数値計算例を示す。

2. マトリックス法による一般的な骨組解析法

一般的な梁要素において考慮しなければならない要素固有方向の"引張（N）"，"ねじり（T）"，2つの直交方向の"曲げ（B）"そして開断面薄肉梁における"曲げねじり（TB）"などの効果に対する固有剛性（これは空間における梁の向きには無関係であり，純粋に梁の弾性変形と関係している）は，梁の横断面の参照軸として図心軸，扇形面積[1]の原点および扇形面積の参照点であるせん断中心を特に選ぶことにより，4つの効果は相互に独立となり(1)式のように（8×8）の対角部分マトリックスの形で固有剛性マトリックスを組み立てることができる。[2]

$$\mathbf{K}_N = \left\lceil \; {}_1\overset{1}{K}_{NN} \quad {}_4\overset{4}{\mathbf{K}}_{NB} \quad {}_1\overset{1}{K}_{NT} \quad {}_2\overset{2}{\mathbf{K}}_{NTB} \; \right\rfloor \qquad (1)$$

上式ではじめの添字Nは固有系を示し，次の添字は上述の（）内の効果を表わす。一方（1）式に対応する固有力は，図-1より（2）式のような列マトリックスで表わせる。

$$\mathbf{P}_N = \left\{ N \quad M_{X'1} \quad M_{X'2} \quad M_{Y'1} \quad M_{Y'2} \quad \overline{T} \quad B_1 \quad B_2 \right\} \qquad (2)$$

固有ねじりモーメント$\overline{T}$は，実際のねじりモーメントではなく，実際のねじりモーメントに加えてバイモーメントによる寄与も含まれている。これより（2）式は，固有変位$\mathbf{e}_N$と（3）式のように関係づけられる。

$$\mathbf{P}_N = \mathbf{K}_N \mathbf{e}_N \qquad (3)$$

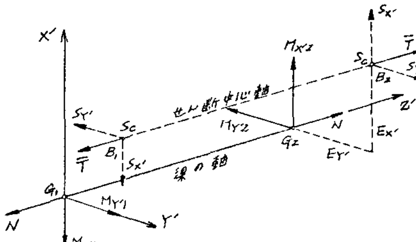


図-1 固有力の正方向

ここで変位の列マトリックスは，次式のようになる。

$$e_N = \{ \delta \quad \phi_{X'1} \quad \phi_{X'2} \quad \phi_{Y'1} \quad \phi_{Y'2} \quad \theta \quad \bar{\theta}'_1 \quad \bar{\theta}'_2 \} \tag{4}$$

これより固有剛性を構造全体の解析に用いる全体系での剛性マトリックスに変換しなければならない。

要素固有剛性 K_N の全体系での要素剛性 K への変換は，次の４つのステップを踏んで行なう．この場合には，傾斜した系が含まれてもよい場合を考慮している。

まず梁の固有な系を図-2に表わしておく。図-2よりX′，Y′軸は，梁の断面主軸と一致する必要はない。

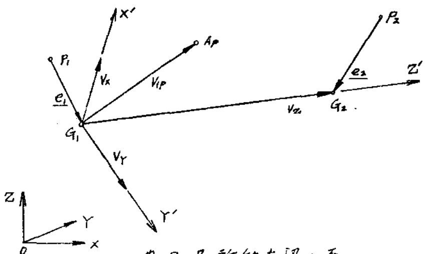


図-2 局所的な梁の系

(a) 固有系から中間的な局所系への変換

図-1と図-3を参照して固有力をそれぞれの図心に関するものに変換する。力と変位の列マトリックスは，

$$\tilde{P} = \{ \tilde{P}_1 \quad \tilde{P}_2 \}, \quad \tilde{e} = \{ \tilde{e}_1 \quad \tilde{e}_2 \} \tag{5}$$

ここで

$$\tilde{P}_i = \{ \tilde{U}_i \quad \tilde{V}_i \quad \tilde{W}_i \quad \tilde{M}_{X'i} \quad \tilde{M}_{Y'i} \quad \tilde{M}_{Z'i} \quad \tilde{B}_i \}$$
$$\tilde{e}_i = \{ \tilde{u}_i \quad \tilde{v}_i \quad \tilde{w}_i \quad \tilde{\phi}_{X'i} \quad \tilde{\phi}_{Y'i} \quad \tilde{\phi}_{Z'i} \quad \tilde{\theta}_i \} \tag{6}$$

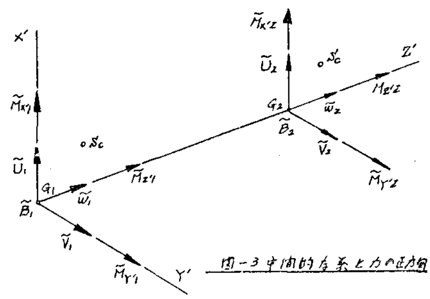


図-3 中間的な系と力の正方向

である．中間的な局所系と固有系の間の変換は，

$$\tilde{P} = \tilde{a}^t P_N \quad , \quad e_N = \tilde{a}\,\tilde{e} \tag{7}$$

と定義できる．ここで $\tilde{a}^t$ は，せん断中心軸に関する力を図心軸に関する力に変換するマトリックスである．

(b) 中間的な局所系から偏心した局所系への変換

図-4を参照して力を図心 G_i から偏心節点 P_i に変換する．この場合ベクトルの関係式は，次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{P}_i &= \tilde{P}_i \\ \hat{M}_i &= \tilde{M}_i + e_i \times \tilde{P}_i \\ \hat{B}_i &= \tilde{B}_i \end{aligned} \tag{8}$$

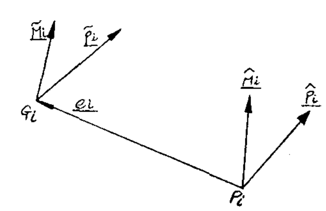


図-4 偏心した系

バイモーメントの変換では，そりによる力の相互作用が無視できると仮定している。偏心した局所系と中間的な局所系の間の変換は，

$$\hat{P} = \tilde{a}^t \tilde{P} \quad , \quad \tilde{e} = \hat{a}\,\hat{P} \tag{9}$$

と定義できる．この変換マトリックスは，次のような(14×14)の対角部分マトリックスとなる。

$$\hat{a}^t = \lceil \; {}_7^7\mathrm{T}_1 \quad {}_7^7\mathrm{T}_2 \; \rfloor \tag{10}$$

ここで(7×7)のT_iは，図心軸での力を偏心した節点での力に変換するマトリックスである。

(c). 偏心した局所系から全体系への変換

ここでの変換は，次のように定義できる。

$$P = a^t \hat{P} \qquad , \qquad \hat{e} = a\,e \tag{11}$$

この変換マトリックスは，(14×14)の対角部分マトリックスとなる。

$$a^t = \lceil \; {}_3^3D^t \quad {}_3^3D^t \quad 1 \quad {}_3^3D^t \quad {}_3^3D^t \quad 1 \; \rfloor \tag{12}$$

ここでDは，全体系と局所系とを結ぶ(3×3)の座標変換マトリックスである。 全体系での力と変位の列マトリックスは，(13)式で与えられる。

$$P = \{ P_1 \quad P_2 \} \qquad , \qquad e = \{ e_1 \quad e_2 \} \tag{13}$$

ここで

$$\begin{aligned} P_i &= \{ U_i \quad V_i \quad W_i \quad M_{xi} \quad M_{yi} \quad M_{zi} \quad B_i \} \\ e_i &= \{ u_i \quad v_i \quad w_i \quad \phi_{xi} \quad \phi_{yi} \quad \phi_{zi} \quad \psi_i \} \end{aligned} \tag{14}$$

u_i，v_i，w_iは節点での軸方向変位，ϕ_{xi}，ϕ_{yi}，ϕ_{zi}は回転変位，ψ_iはバイモーメントB_iに対応するそり自由度を表わしている。

(d). 全体系から傾斜した系への変換

構造内に傾斜した系がある場合，全体系から傾斜した系への変換は，次の関係式で表わせる。

$$P^* = a^{*t} P \qquad , \qquad e = a^* e^* \tag{15}$$

この変換マトリックスは，次のような対角部分マトリックスの形となる。

$$a^{*t} = \lceil \; {}_3^3D_1^* \quad {}_3^3D_1^* \quad 1 \quad {}_3^3D_2^* \quad {}_3^3D_2^* \quad 1 \; \rfloor \tag{16}$$

ここでD_i^*は，傾斜した系と全体系との間の座標変換マトリックスである。 以上より上記のステップをたどることにより固有の系から全体の系，さらには傾斜した系への変換を行なうことができる。ここで固有剛性K_Nを最終的な要素剛性Kに変換するには，簡単に次式のように表わせる。

$$K = a_N^t \, K_N \, a_N \tag{17}$$

ここで $a_N = \tilde{a}\,\hat{a}\,a\,a^*$ は固有系と全体系を関係ずける変換マトリックスである。

3. 計算例

(a). 変断面片持梁

梁の軸（図心軸）が一致していない変断面梁を有する構造物の解析を行なう場合、軸の不連続性を考慮したときとしないときでは，どのような相違があるかを検討するために図-5のような変断面片持梁の解析を行った。 偏心を考慮すべきか否かを判断するために，図心軸が連続している状態でモデル化し、断面変化点に軸の偏心量に等価なモーメントを補正した結果と比較した。 それぞれのモデル化した結果と荷重状態は図-6に示してあり、変位の比較結果は図-7に示した。

(b)・不等断面梁を有する門形ラーメン

高架道路の下部構造としてしばしば用いられることのある図-8のような門形ラーメンの解析を行ない，偏心を考慮した場合（D）としない場合（E）とでは、どのような相違があるかを検討し曲げモーメントについての比較結果を図-9に示した。

4. 考 察

図-7より偏心させた結果とモーメントで補正した結果は良く一致している。 偏心を考慮した場合としない場合とでは、かなりの差がみられる。 また(b)については，変位は顕著な差がみられなかったが一般的に必要となる断面力（モーメント）図-9では、偏心による影響が表われている。 これらより、複雑な構造物を厳密に解析するようになってきた現在では、“軸の偏心”ということに対して十分留意されるべきであると思われる。 また曲げねじり効果までを考慮するような構造物に対しては、“せん断中心の不連続性”ということについても今後検討してみる必要があるものと思われる。 最後にこれらの計算は、CDC 6600 ASKA BECOS，BECOSX Element を使用して行なった。

5. 参考文献

(1) Vlasov ：奥村外共訳 “薄肉弾性ばりの理論” 技報堂

(2) Balmer ：武田訳 “ASKAにおける一般的梁要素” ISD Report NO. 75.

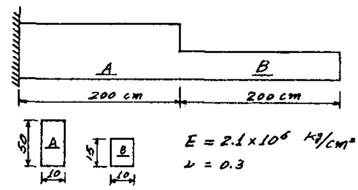


図-5 変断面片持梁と断面寸法

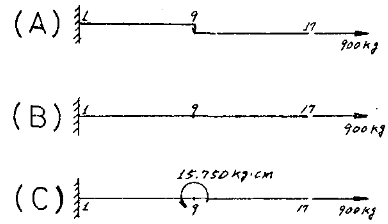
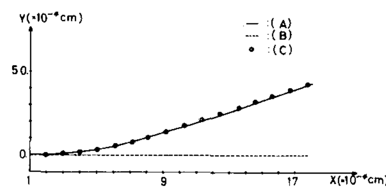
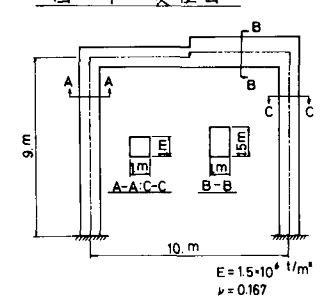


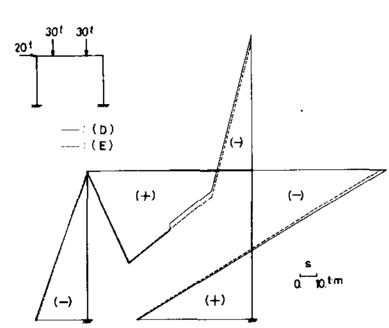
図-6 モデル化



図－7 変位図



図－8 門形ラーメン



図－9 モーメント図