I-37　初期変形を考慮した、曲げ軸力部材の、大変形法における剛性マトリックス

(株) 宮地鉄工所　正会員　後藤　茂夫
(株) 宮地鉄工所　正会員　大西　孝紀
(株) 宮地鉄工所　正会員　大槻　護
(株) 宮地鉄工所　正会員○前田　武夫

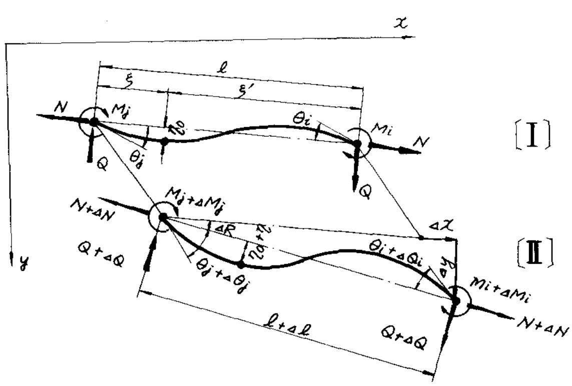
〔I〕 要旨

本文は、曲げ剛性を有する、無応力時直線部材によって構成される構造物について、大変形解析を試みたものである。

荷重漸増法によって大変形解析を行う時、構造系の幾何学的条件の修正には、当然、先行状態の撓み角をも考慮しなければならない。又、設計上の問題として、架設途上のラーメン系構造物に於ては、架設段階に従って、順次、構造系が変化するため、増分形式による解析が必要となる。

本文は、構成部材個々については、線型であるが、構造物全体として、弾性的非線型挙動を示す場合を対象としている。

〔II〕 部材座標系に於ける、部材端力増分と材端変位の関係



先行状態、及び、変形後の曲げモーメント曲線に関する微分方程式は、

$$\frac{d^2M}{d\xi^2}-\frac{N}{EI}M=0 \qquad \text{--- (1)}$$

$$M=-EI\frac{d^2\eta_0}{d\xi^2} \qquad \text{--- (2)}$$

$$\frac{d^2(M+\Delta M)}{d\xi^2}-\frac{N+\Delta N}{EI}(M+\Delta M)=0 \qquad \text{--- (3)}$$

$$(M+\Delta M)=-EI\frac{d^2(\eta+\eta_0)}{d\xi^2} \qquad \text{--- (4)}$$

と表わされる。故に、曲げモーメント増分に関しては、

$$\left(\frac{d^2\Delta M}{d\xi^2}-\frac{N+\Delta N}{EI}\Delta M\right)-\frac{\Delta N}{EI}=0\ , \quad \Delta M=-EI\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \qquad \text{--- (5)}$$

と書ける。(1)、(5)の連立微分方程式を、境界条件を入れて解けば、N、$N+\Delta N$ の正負に依って、4通りの解が得られるが、

$$\rho = \frac{N+\Delta N}{EI} \ell^2 , \qquad \bar{\rho} = \frac{N}{EI} \ell^2 \qquad --- (6)$$

とおき、ρ，$\bar{\rho}$に関して Taylor 展開し、

$$a = 4 + \frac{2}{15}\rho - \frac{11}{6300}\rho^2 + \frac{1}{27000}\rho^3 - \frac{509}{582\,120\,000}\rho^4 + --- \qquad --- (7)$$

$$b = 2 - \frac{1}{30}\rho + \frac{13}{12600}\rho^2 - \frac{11}{756\,000}\rho^3 + \frac{907}{1\,164\,240\,000}\rho^4 + --- \qquad --- (8)$$

$$\gamma_a = \frac{\ell^2}{45EI}\left\{1 - \frac{2}{21}(\rho+\bar{\rho}) + \frac{1}{105}(\rho^2+\rho\cdot\bar{\rho}+\bar{\rho}^2) - \frac{2}{2079}(\rho+\bar{\rho})(\rho^2+\bar{\rho}^2) + \frac{2764}{2837835}(\rho^4+\rho^3\cdot\bar{\rho}+\rho^2\cdot\bar{\rho}^2+\rho\cdot\bar{\rho}^3+\bar{\rho}^4) + ---\right\} \qquad --- (9)$$

$$\gamma_b = \frac{\ell^2}{360EI}\left\{1 - \frac{31}{42}(\rho+\bar{\rho}) + \frac{127}{1680}(\rho^2+\rho\cdot\bar{\rho}+\bar{\rho}^2) - \frac{73}{9504}(\rho+\bar{\rho})(\rho^2+\bar{\rho}^2) + \frac{1414477}{181621440}(\rho^4+\rho^3\cdot\bar{\rho}+\rho^2\cdot\bar{\rho}^2+\rho\cdot\bar{\rho}^3+\bar{\rho}^4) + ---\right\} \qquad --- (10)$$

とおけば、$\rho=0$，$\bar{\rho}=0$の場合を含めて、部材端モーメントは、

$$\begin{bmatrix} \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{bmatrix} = \frac{EI}{\ell} \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_i' \\ \Delta\theta_j' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \Delta N \qquad --- (11)$$

と、表わされる。但し、

$$\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_a & -\gamma_b \\ -\gamma_b & \gamma_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i \\ M_j \end{bmatrix} \qquad --- (12)$$

又、

ε ： 曲げ変形に依る格点間距離の減小量

$\Delta\ell_t$ ： 温度変化に依る部材の自由伸縮量

ℓ_0 ： 無応力長

F ： $\frac{EA}{\ell_0}$

とおけば、軸方向力増分は、

$$\Delta N = F(\Delta\ell + \varepsilon - \Delta\ell_t) \qquad --- (13)$$

となる。次に、先に得られた、撓み曲線を

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\int_0^\ell \left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + 2\frac{d\eta}{d\xi}\cdot\frac{d\eta_0}{d\xi}\right) d\xi \qquad --- (14)$$

に代入し、

$$f_a = \frac{4}{3} - \frac{1}{5}(\rho+\bar{\rho}) + \frac{8}{297}(\rho^2+\rho\cdot\bar{\rho}+\bar{\rho}^2) - \frac{13\,437\,877}{2\,075\,673\,600}(\rho+\bar{\rho})(\rho^2+\bar{\rho}^2) + --- \qquad --- (15)$$

$$f_b = \frac{31}{21} - \frac{127}{560}(\rho+\bar{\rho}) + \frac{73}{2376}(\rho^2+\rho\cdot\bar{\rho}+\bar{\rho}^2) - \frac{177\,587}{454\,053\,600}(\rho+\bar{\rho})(\rho^2+\bar{\rho}^2) + --- \qquad --- (16)$$

$$g_a = 1 - \frac{4}{21}\rho + \frac{1}{35}\rho^2 - \frac{8}{2079}\rho^3 + \frac{13\,437\,877}{14\,529\,715\,200}\rho^4 + --- \qquad --- (17)$$

$$g_b = 7 - \frac{31}{21}\rho + \frac{127}{560}\rho^2 - \frac{73}{2376}\rho^3 + \frac{177\,587}{454\,053\,600}\rho^4 + --- \qquad --- (18)$$

$$v = \frac{1}{2520}\left(\frac{\ell}{EI}\right)^2 \left\{4f_a(M_i^2+M_j^2) - 7f_b M_i M_j\right\} \qquad --- (19)$$

$$\begin{bmatrix} w_i \\ w_j \end{bmatrix} = \frac{1}{720}\frac{\ell}{EI} \begin{bmatrix} 8g_a, & -g_b \\ -g_b, & 8g_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2M_i + \Delta M_i \\ 2M_j + \Delta M_j \end{bmatrix} \qquad --- (20)$$

とおけば、

$$\varepsilon = \frac{\ell^2}{EI}\begin{bmatrix} -v\ell \, , & w_i \, , & w_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{bmatrix} \qquad --- (21)$$

(11)を(21)に、(21)を(13)に代入し整理すれば、

$$\Delta N = F'(\Delta\ell - \Delta\ell_t) + F'\ell \begin{bmatrix} w_i \, , & w_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \, , & b \\ b \, , & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_i' \\ \Delta\theta_j' \end{bmatrix} \qquad --- (22)$$

但し、

$$F' = F / \left\{ 1 + F(v\ell - u_i w_i - u_j w_j) \frac{\ell^3}{EI} \right\} \qquad \text{--- (23)}$$

(22)を(11)に代入し、$K = \frac{EI}{\ell}$とおいて整理すれば、

$$\begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F' & F'\ell(aw_i + bw_j) & F'\ell(bw_i + aw_j) \\ F'u_i & Ka + F'\ell u_i(aw_i + bw_j) & Kb + F'\ell u_i(bw_i + aw_j) \\ F'u_j & Kb + F'\ell u_j(aw_i + bw_j) & Ka + F'\ell u_j(bw_i + aw_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\ell - \Delta\ell_t \\ \Delta\theta_i' \\ \Delta\theta_j' \end{bmatrix} \qquad \text{--- (24)}$$

〔Ⅲ〕 共通座標系に於ける、材端力増分と材端変位の関係

$$\Delta d = \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta x_j \\ \Delta y_j \end{bmatrix}, \quad \alpha = \frac{x_i - x_j}{\ell}, \quad \beta = \frac{y_i - y_j}{\ell}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad \text{--- (25)}$$

とおけば、

$$\tau \overset{d}{=} \sin(\Delta R) = \frac{1}{\ell + \Delta\ell} \boldsymbol{\beta}^* \cdot \Delta d \qquad \text{--- (26)}$$

$$\therefore \quad \Delta R = \frac{\sin^{-1}\tau}{\tau} \cdot \tau = \frac{\sin^{-1}\tau}{\tau} \frac{1}{\ell + \Delta\ell} \boldsymbol{\beta}^* \cdot \Delta d = \frac{\varphi}{\ell} \boldsymbol{\beta}^* \cdot \Delta d \qquad \text{--- (27)}$$

但し、

$$\varphi \overset{d}{=} \frac{\ell}{\ell + \Delta\ell} \frac{\sin^{-1}\tau}{\tau} = \frac{\ell}{\ell + \Delta\ell} \left(1 + \frac{1}{6}\tau^2 + \frac{3}{40}\tau^4 + \frac{5}{112}\tau^6 + \cdots \right) \qquad \text{--- (28)}$$

又、

$$(\ell + \Delta\ell)^2 - \ell^2 = (\boldsymbol{\alpha}^* \cdot \ell + \Delta d^*) \cdot (\boldsymbol{\alpha} \cdot \ell + \Delta d) - \boldsymbol{\alpha}^* \cdot \boldsymbol{\alpha} \ell^2 \qquad \text{--- (29)}$$

から、今、

$$w = \frac{1}{\ell} \left[\boldsymbol{\alpha}^* \Delta d + \frac{1}{2\ell} \Delta d^* \cdot \Delta d \right] \qquad \text{--- (30)}$$

$$\eta = \frac{2\ell}{2\ell + \Delta\ell} = 1 - \frac{w}{2} + \frac{w^2}{2} - \frac{5}{8}w^3 + \frac{7}{8}w^4 - \frac{21}{86}w^5 + \cdots \qquad \text{--- (31)}$$

とおけば、

$$\Delta\ell = \eta \cdot w \cdot \ell \equiv \eta \left(\boldsymbol{\alpha}^* + \frac{\Delta d^*}{2\ell} \right) \Delta d \qquad \text{--- (32)}$$

故に、(27)、(32)をまとめて

$$\begin{bmatrix} \Delta\ell \\ \Delta\theta_i' \\ \Delta\theta_j' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\ell \\ \Delta\theta_i - \Delta R \\ \Delta\theta_j - \Delta R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta\left(\boldsymbol{\alpha}^* + \frac{\Delta d^*}{2\ell}\right), & 0, & 0 \\ -\frac{\varphi}{\ell}\boldsymbol{\beta}^*, & 1, & 0 \\ -\frac{\varphi}{\ell}\boldsymbol{\beta}^*, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta d \\ \Delta\theta_i \\ \Delta\theta_j \end{bmatrix} \qquad \text{--- (33)}$$

となる。　変形後の、部材軸の方向余弦ベクトルを

$$\alpha + \Delta\alpha, \qquad \beta + \Delta\beta \qquad \text{--- (34)}$$

とすると、$\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ は、

$$\begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\ell + \Delta\ell} \begin{bmatrix} \mathbf{e}, & \\ & , \mathbf{e}' \end{bmatrix} \left[\Delta d - \boldsymbol{\alpha}\Delta\ell \right] \qquad \text{--- (35)}$$

但し、

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}' = \begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix} \qquad \text{--- (36)}$$

である。　　先行状態、変形後の部材端力を各々

$$\begin{bmatrix} D_i \\ M_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} D_i + \Delta D_i \\ M_i + \Delta M_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_i + \Delta X_i \\ Y_i + \Delta Y_i \\ M_i + \Delta M_i \end{bmatrix} \qquad \text{--- (37)}$$

部材力パラメーターを

$$\mu = \frac{N + \Delta N}{\ell + \Delta\ell}, \qquad \nu = \frac{Q + \Delta Q}{\ell + \Delta\ell}, \qquad \nu' = \frac{Q + \Delta Q}{\ell}, \qquad \boldsymbol{\mu} = [\mathbf{e}, \mathbf{e}'] \begin{bmatrix} \mu \\ \nu \end{bmatrix} \qquad \text{--- (38)}$$

とおけば、

$$\begin{bmatrix} \Delta D_i \\ \Delta M_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+\Delta\alpha , & \beta+\Delta\beta , & \\ , & , & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N+\Delta N \\ Q+\Delta Q \\ M_i+\Delta M_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha , & \beta , & \\ , & , & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ Q \\ M_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha , & \beta , & \\ , & , & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta Q \\ \Delta M_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu(\Delta\alpha - \alpha\cdot\Delta\ell) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{--- (39)}$$

又、

$$\Delta Q = (Q+\Delta Q) - Q = -\frac{(M_i+\Delta M_i)+(M_j+\Delta M_j)}{\ell+\Delta\ell} + \frac{M_i+M_j}{\ell} = -\frac{\Delta M_i+\Delta M_j}{\ell} - \nu'\Delta\ell \quad \text{--- (40)}$$

であるから、

$$\begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta Q \\ \Delta M_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & , & , \\ , & -\frac{1}{\ell} & , -\frac{1}{\ell} \\ , & 1 & , \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \nu'\Delta\ell \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{--- (41)}$$

(33) を (24)に、(24) を (41)に、(41) を (39)に代入し、

$$A_{ij} = \left\{F'\kappa\left(\alpha - \frac{u_i+u_j}{\ell}\beta\right) - \kappa(\nu'\beta+\mu\alpha)\right\}\left(\alpha^* + \frac{\Delta\alpha^*}{2\ell}\right) + \mu + 2K\varphi\frac{a+b}{\ell^2}\beta\cdot\beta^* - F'\varphi(a+b)(w_i+w_j)\left(\alpha - \frac{u_i+u_j}{\ell}\beta\right)\beta^* \quad \text{--- (42)}$$

$$b^*_{ij} = F'\kappa u_i\left(\alpha^* + \frac{\Delta\alpha^*}{2\ell}\right) - K\varphi\frac{a+b}{\ell}\beta^* - F'\varphi(a+b)u_i(w_i+w_j)\beta^* \quad \text{--- (43)}$$

$$b^*_{ji} = -F'\kappa u_j\left(\alpha + \frac{\Delta\alpha^*}{2\ell}\right) + K\varphi\frac{a+b}{\ell}\beta^* + F'\varphi(a+b)u_j(w_i+w_j)\beta^* \quad \text{--- (44)}$$

$$C_{ij} = F'\ell(aw_i+bw_j)\left(\alpha - \frac{u_i+u_j}{\ell}\beta\right) - K\frac{a+b}{\ell}\beta \quad \text{--- (45)}$$

$$C_{ji} = -F'\ell(aw_j+bw_i)\left(\alpha - \frac{u_i+u_j}{\ell}\beta\right) + K\frac{a+b}{\ell}\beta \quad \text{--- (46)}$$

$$G_{aij} = Ka + F'\ell u_i(aw_i+bw_j) \quad \text{--- (47)}$$

$$G_{bij} = Kb + F'\ell u_j(bw_i+aw_j) \quad \text{--- (48)}$$

$$\bar{\alpha}_i = \alpha - \frac{u_i+u_j}{\ell}\beta \quad \text{--- (49)}$$

とおき、i-j 両端について、剛性方程式の形で表わせば、

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A_{ij} , & C_{ij} & -A_{ij} , & -C_{ji} \\ b^*_{ij} , & G_{aij} & -b^*_{ij} , & G_{bij} \\ \hline -A_{ji} , & -C_{ij} & A_{ji} , & C_{ji} \\ -b^*_{ji} , & G_{bji} & b^*_{ji} , & G_{aji} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \Delta\alpha_i \\ \Delta\theta_i \\ \Delta\alpha_j \\ \Delta\theta_j \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} \Delta D_i \\ \Delta M_i \\ \hline \Delta D_j \\ \Delta M_j \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} \bar{\alpha}_i \\ u_i \\ \hline \bar{\alpha}_j \\ u_j \end{array}\right] F'\Delta\ell_t \quad \text{--- (50)}$$

となる。(50)は、a、b、κ、φ、u、w に非線型成分を含んではいるが、陽に表われる非線型項は、$\frac{1}{2\ell}\Delta\alpha^*$ であり、非線型性の大勢を定めるのは、この項であるといってよい。特に、これを、0 とすれば、見かけ上、線型形式となり、この場合を、「線型化有限変形法」と言う。

a、b、κ、φ、u、w は、近似的には、

$$\boxed{\begin{aligned} & a = 4 ,\ b = 2 ,\ \kappa = 1 ,\ \varphi = 1 \\ & u_i = \frac{\ell^2}{12EI}M_i + \frac{\ell^2}{30EI}M_j \\ & u_j = \frac{\ell^2}{12EI}M_j + \frac{\ell^2}{30EI}M_i \\ & w_i = \frac{\ell}{720EI}\{8(2M_i+\Delta M_i) - 7(2M_j+\Delta M_j)\} \\ & w_j = \frac{\ell}{720EI}\{8(2M_j+\Delta M_j) - 7(2M_i+\Delta M_i)\} \end{aligned}} \quad \text{--- (51)}$$

となる。

［Ⅳ］ 参考文献

後藤茂夫；「非線型有限変形法（大変形法）によるトラスの大変形解析とその応用プログラム」
土木学会論文報告集 第194号 （1972）