

東京工業大学 正員 吉田 裕
 学生員 ○岡山 和生

1. まえがき

本報告は、軸力部材系の幾何学的大変形解析について述べたものである。

長大橋の出現にともない、大変形解析の研究は、数多く行なわれている。例えば、厳密解式とその解法についての報告(i)においては、無応力状態を初期状態において、非常に変形しやすい構造系についても、良い収束性で解を得ている。又、エネルギー法による解法についての報告(ii)においては、設定した形状に対して、軸力を仮定することにより、初期状態を設定して、解を得ている。しかし、ケーブル系構造物の変形の多様性から見れば、未だ問題は残されている。

ここでは、基本的には、報告(iii)の立場に基づいて、直接剛性法を応用した単純な反復計算を行った。すなわち、増分に関する近似解式により、荷重漸増法を用いて近似解を得て、更に載荷後の釣合状態における荷重の不釣合量を修正載荷し正解を得た。

又、この方法では、線型解を初期値としているので、対象とする構造物が、不安定な場合には、無応力状態を、初期状態として計算を始めることができないため、初期状態をあらかじめ規定する必要がある。そこで、不安定構造の初期状態を決める方法として、次のような処理過程を採った。初期形状だけが与えられている場合を考えることとし、その初期形状における軸力系を仮定して、計算を進めた。すなわち、与えられた初期形状、及び載荷外力から、最小二乗法により一様に仮定した軸力系の載荷外力に対する不釣合量を載荷し、求める釣合状態を得た。

このような解析法では、単ケーブルなどのように不安定構造であり、初期形状から与えられた外力に対して釣合う形状への変形過程が、不安定状態を含んでいる場合には、扱うことが不可能である。このような場合、変形を抑制し、解の発散を除くために、各接点を弾性バネで支持してから載荷する方法をとった。正解を得るために、次には、より弱いバネに付替え、支持力の差を外力として載荷するというように、序々にバネを弱くし、最後には完全に取り去った状態で解を得た。この方法によって、静的な釣合式を解くことにより、不安定状態を経過する変形をも、扱うことができた。

2. 基本式

変形前後の部材の ij の部材力 N_{ij} と、端力ベクトル D_{ij} との関係より、

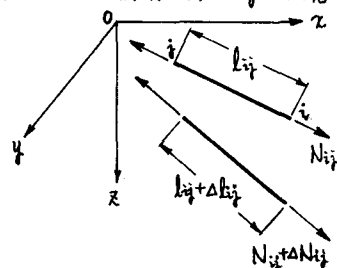
$$\begin{cases} d_{ij} \cdot N_{ij} = D_{ij} \\ (d_{ij} + \Delta d_{ij}) (N_{ij} + \Delta N_{ij}) = (D_{ij} + \Delta D_{ij}) \end{cases}$$

を得、二式の差をとって、

$$d_{ij} \Delta N_{ij} + \Delta d_{ij} (N_{ij} + \Delta N_{ij}) = \Delta D_{ij} \quad \dots (1)$$

を得る。ここに、 d_{ij} は、部材 ij の方向余弦ベクトル、 Δd_{ij} は、

図1. 変形前後の部材 ij の状態



変数 x の、変形前後の変化分を示す。

部材 ij の弾性式として、

$$\Delta N_{ij} = F_{ij} \cdot \Delta l_{ij} \quad \text{但し、} F_{ij} = A_{ij} \cdot E_{ij} / l_{ij} \quad \dots\dots (2)$$

を得る。ここに、 A_{ij} , E_{ij} は、それぞれ、部材の断面積と、ヤング率を表す。

部材 ij の幾何学的関係から、 dl_{ij} を部材 ij の長さの方向成分ベクトルとすると、

$$\left. \begin{aligned} dl_{ij} \cdot l_{ij} &= dl_{ij} \\ (dl_{ij} + \Delta dl_{ij}) (l_{ij} + \Delta l_{ij}) &= dl_{ij} + \Delta dl_{ij} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} dl_{ij}^T \cdot dl_{ij} &= 1 \\ (dl_{ij} + \Delta dl_{ij})^T (dl_{ij} + \Delta dl_{ij}) &= 1 \end{aligned}$$

を得る。 $l_{ij} + \Delta l_{ij} \doteq l_{ij}$ なる近似を行なって整理して、

$$\left. \begin{aligned} \Delta dl_{ij} &= \Delta dl_{ij} / l_{ij} \\ \Delta l_{ij} &= \{ dl_{ij}^T \Delta dl_{ij} + \frac{1}{2} \Delta dl_{ij}^T \Delta dl_{ij} \} / l_{ij} \end{aligned} \right\} \dots\dots (3)$$

を得る。

(2), (3)式を、(1)式に代入して整理して

$$K_{ij} = \frac{N_{ij}}{l_{ij}} e_{ij} + \frac{F_{ij}}{l_{ij}^2} dl_{ij} \cdot dl_{ij}^T \quad \text{ここに、} e \text{は単位マトリクスを表す。}$$

$$R_{ij} = \frac{F_{ij}}{l_{ij}^2} \{ (dl_{ij} + \Delta dl_{ij}) (\frac{1}{2} \Delta dl_{ij}^T \Delta dl_{ij}) + \Delta dl_{ij} (dl_{ij}^T \Delta dl_{ij}) \}$$

とすると、部材 ij の増分に関する基本式

$$K_{ij} \cdot \Delta dl_{ij} = \Delta D_{ij} - R_{ij}$$

を得る。これから、直接剛性法に従い、全体系に関する増分の近似解式

$$K \cdot \Delta d = \Delta F - R \quad \dots\dots (4)$$

が得られる。ここに、 K は、線型な剛性マトリクス、 R は、荷重項にくくり出した非線型項のベクトルである。

3. 解法

初期値として、非線型項を無視($R=0$)した、線型解を用いる。以後の段階では、前段の解から非線型項を求め、これによって荷重項を修正しながら、反復計算を行なう。この反復計算においては、剛性マトリクス K の組立、逆マトリクスの計算の必要がない。なお、載荷荷重は実際の載荷 w 重を、実用的な収束性が得られる程度の大きさの微小荷重に分割したものであり、以上の操作を分割数だけ繰返すことによって、全荷重を載荷した状態での解を得る。

しかし、この解は近似解であるので、載荷後の釣合状態を満足しているとは限らず、正解を得るために、補正が必要である。載荷後の部材力の計算値を N 、載荷後の座標の計算値から求めた変換マトリクスを T 、載荷後の実際の外力を F 、外力項の不釣合量を f とすると、釣合式は、

$$T \cdot N = F - f$$

となる。この不釣合量 f を、補正外力として載荷する計算を、再び上記の方法で行う。この操作を、必要な精度が得られるまで、繰り返す。なお、付加荷重 f は小さいので、分割する必要はない。

同様の考え方を、初期軸力を仮定する時に用いる。この場合、 T は、初期形状における変換マトリ

クス, N は, 仮定軸力である。又, P は, 与えられた載荷々重, f は, 不釣合力であり, これを補正載荷する計算により, 与えられた載荷々重下に釣合状態が得られる。 f は, 二乗和, $r = f^T f$ が, 最小の時, 補正載荷が有利であるとし, この条件で, N を最小二乗法で仮定する。なお, 仮定軸力はすべての部材を通じて一様であるとした。

4. 不安定状態を経過する時の計算法

不安定な構造のすべての接点の, すべての自由度を持つ方向に, 同じバネ定数 k を持つ弾性バネを, 載荷前の状態において自然長であるように取り付けると, (4)式は, 以下のように, 書き直せる。

$$(K + k) \cdot \Delta d = \Delta F - R$$

但し, k は, K と同じ寸法で, すべての主対角要素に k を持つ対角行列である。

こうして得た解に対する, バネを除いて考えた釣合式(5)は, 不釣合力 f の値の中に, バネが支持していた力をも含んでいる。そのため, この f 全部を, 補正外力として載荷すれば, 今まで付いていたバネは, 取り去ったことになるが, まだ不安定状態を経過し終わっていない時には, f を載荷する段階においても, 上述のようなバネを, 新たに取り付けて考える必要がある。こうして, 不安定状態を経過し終るまで同様な操作を繰返すが, 安定性を回復するにつれて, バネ定数 k を小さい値に変えて行き, 最後には, 0 として, 不釣合力 f が, 必要なだけ小さい値になった時, 正解が得られる。

5. 数値計算例

(1) 立体トラス補剛析のねじり

中間傾構のないトラス析の立体又変形解析をねじりを生じる荷重に対して行なってみた。計算諸元は, 図2で示し, 図3に変形状態, 表1に軸力を微小変形理論による値と比較して示した。なお, 初期状態として, 無応力状態をとった。

表1. 軸力の比較

部材 (図3中 に示す)	軸力 (t)	
	大変形解析	微小変形解析
a	-3.83	-3.08
b	4.34	5.09
c	-6.59	-5.74
d	6.40	7.25
e	-14.30	-13.40
f	-0.19	0.65
g	14.08	14.97
h	1.01	1.80

図2.

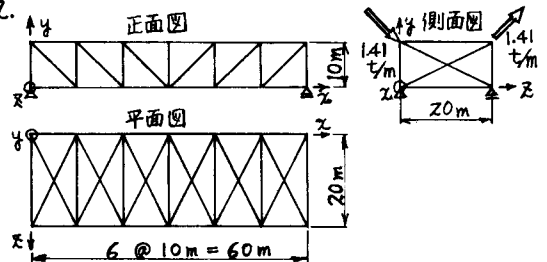
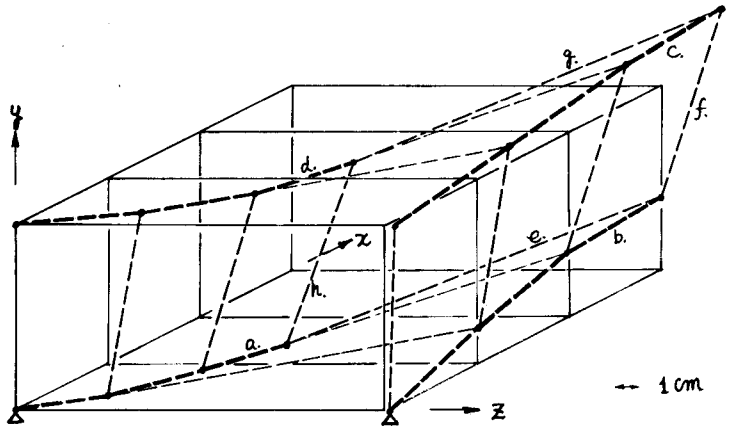


図3. 変位図。(片側三格向のみ示す)



(2) 不安定状態を経過する単ケーブル

初期状態における形状のみ。図4に示すように与えられている単ケーブルに、集中荷重と分布荷重を載荷した場合の状態を得るまでの変形過程を図5に、軸力の変化過程を図6に示す。

図4. 初期形状

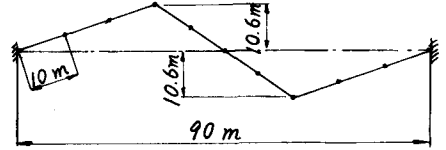
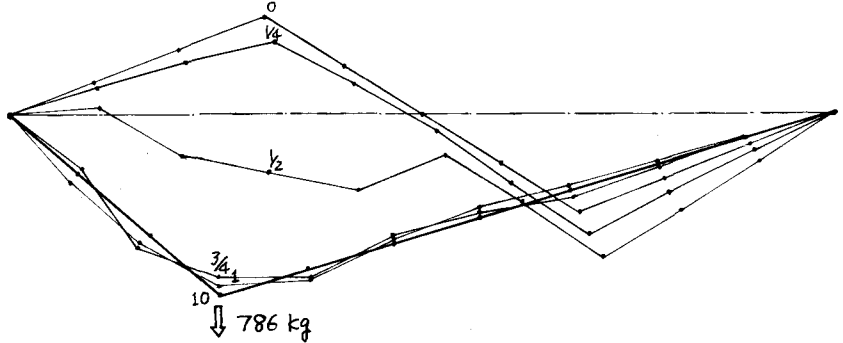


図5. 変形過程

① 集中荷重



② 分布荷重

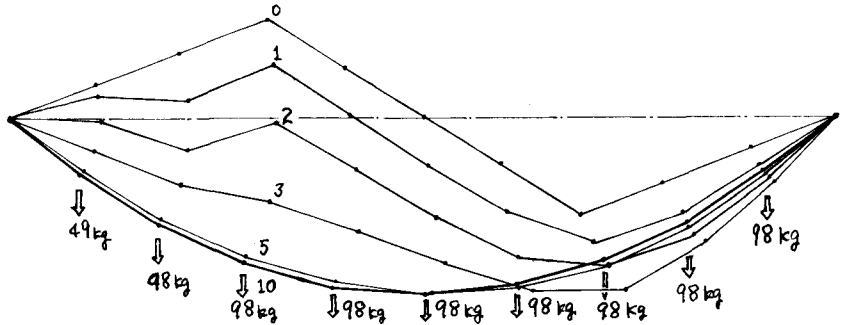
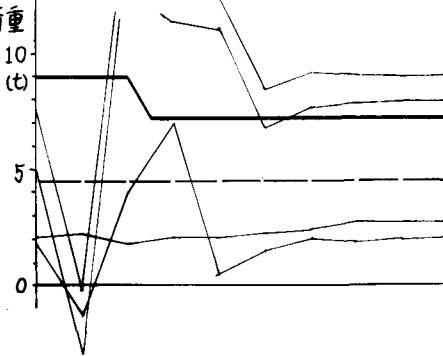
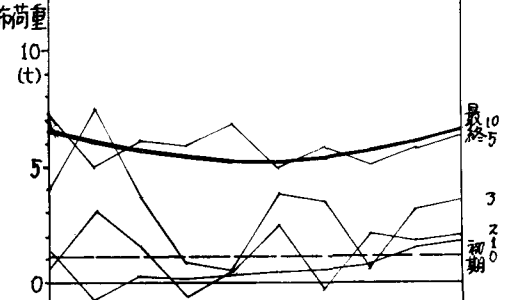


図6. 軸力の変化過程

① 集中荷重



② 分布荷重



6. 参考文献

(i) 後藤 茂夫 他 "非線型有限変形法によるトラスの大変形解析とその応用プログラム"
土木学会論文報告集 No.194 Dec. 1971

(ii) 波田 凱夫 他 "エネルギー法によるケーブル構造の解析" (チー報)
第26回土木学会講演会講演集 Oct. 1971

(iii) C.H.Thornton 他 "Three Dimensional Suspension Structure"
A.S.C.E. S.T. Apr. 1967