I-34　梁一柱の有限変形法

本州四国連絡橋公団　正会員　林 有一郎

1.まえがき

梁一柱からなる平面骨組構造物の有限変形法は、座屈解析及び吊橋を主目的とした構造物の大変形解析のために発達した。現在迄の種々の試みの中で、Saafan[1]によるものは、接線剛線マトリックスが精度を欠いていたとはいえ、厳密な釣合方程式から出発し、Newton-Raphson法と不平衡力の概念を結びつけ、軸力による不安定効果(instability effect)、又撓みによる部材の短縮効果(influence of bowing or flexural shortening)を考察しているという意味で、記念碑的なものであろう。ここに報告する方法は、Saafanによる式を修正したTezcan[2]による考え方に基ずいているが、次の点に意を置いて解析を行っている。

(1)釣合条件式を有限歪に対する変分原理から導いた。

(2)節点力を軸力による不安定効果，撓みによる短縮効果を考慮しつつ、節点位置座標で一意的に表示できるように試み、その結果軸力が圧縮と引張の場合を包含するような統一的な関係式を誘導した。

(3)誘導した関係式の適用について考慮した。

2.釣合条件式

ここに述べる解法に於てなされる基本的な仮定を次のとおりとするが、この他にも梁一柱弾性有限変形解析で通常なされる仮定はなりたっているものとする。

(1)部材曲線を $y=f(x)$ とする時、曲率 Φ は $f''(x)$ で表わされる。

(2)部材の軸及び軸直角方向の変位を u，v とする時、軸力による有限歪 ε_N は次式で表わされる。

$$\varepsilon_N = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \quad (1)$$

座標系 O-X-Y，部材節点力 $F_S=(F_{Xa}, F_{Ya}, F_{\theta a}, F_{Xb}, F_{Yb}, F_{\theta b})^T$，節点位置座標 $D=(X_a, Y_a, \theta_a, X_b, Y_b, \theta_b)^T$は、図-1 に示すとおりとする。部材座標系 O'-x-y の x 軸を節点 a，b を結ぶ弦にとり，y 軸をそれに直交する軸とする。部材座標で表わされた節点力 $F_m=(R_a, S_a, M_a, R_b, S_b, M_b)^T$ 及び変位 θ_a'，θ_b' は図-2 に示すとおりとする。

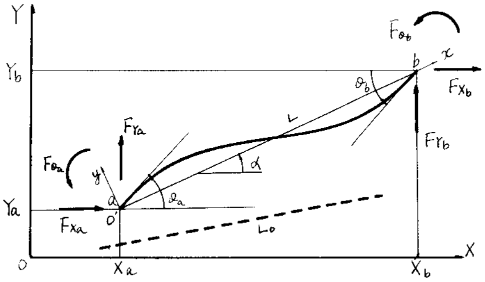

図-1　構造座標系

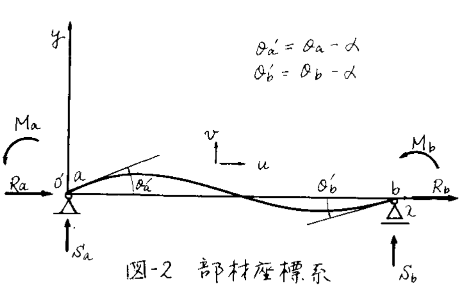

図-2　部材座標系

軸力を引張を正にしてTで表わすと，応力と変位の関係は次式で与えられる。

$$T = EA\varepsilon_N = EA\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\} \tag{2}$$

$$M = EI\Phi = EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{3}$$

歪エネルギーUは次式で表わされる。

$$U = \int\frac{T^2}{2EA}dx + \int\frac{M^2}{2EI}dx \tag{4}$$

外力ポテンシャルをW，全ポテンシャルエネルギーをΠとするとエネルギー原理

$$\delta\Pi = \delta U - \delta W = 0 \tag{5}$$

に(2)，(3)を代入し，δuとδvの任意性から部材内の釣合条件式として次式を得る。

$$\frac{dT}{dx} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dM}{dx} - T\frac{dv}{dx}\right) = 0 \tag{6}$$

(6)は曲げモーメントと断力の関係

$$\frac{dM}{dx} = S \tag{7}$$

を使えば次式と等価になる。

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} + Pv = -M_a + S_a x \qquad (T=-P<0) \tag{8}$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} - Tv = -M_a + S_a x \qquad (T>0) \tag{9}$$

3.節点力と位置座標

(5)の変分原理で示された釣合式にuに対してはxの1次式，vに対してはxの3次式で近似された変位を代入すれば、有限要素法の手法に従って節点力がでるがここに於ては，(8)，(9)を忠実に解き(2)，(3)，(7)から節点力を導くことにする。(8)を解くとvは圧縮の場合三角関数で，引張の場合双曲線関数で表わされる。v，M_a，M_b，S_a，S_bは次の様になる。

$$v_P = -\frac{M_a\cos\rho_P + M_b}{P\sin\rho_P}\sin\nu_P x + \frac{M_a}{P}\cos\nu_P x + \frac{S_a}{P}x - \frac{M_a}{P} \tag{10}$$

$$M_{aP} = \frac{4EI}{L}S_{1P}(\theta_a - \alpha) + \frac{2EI}{L}S_{2P}(\theta_b - \alpha) \tag{11}$$

$$M_{bP} = \frac{2EI}{L}S_{2P}(\theta_a - \alpha) + \frac{4EI}{L}S_{1P}(\theta_b - \alpha) \tag{12}$$

$$S_{1P} = \frac{\rho_P(\sin\rho_P - \rho_P\cos\rho_P)}{4(2-2\cos\rho_P - \rho_P\sin\rho_P)} \qquad S_{2P} = \frac{\rho_P(\rho_P - \sin\rho_P)}{2(2-2\cos\rho_P - \rho_P\sin\rho_P)} \tag{13}$$

$$\nu_P = \sqrt{P/EI} \qquad \rho_P = \nu_P L \tag{14}$$

$$v_T = \frac{M_a\cosh\rho_T + M_b}{T\sinh\rho_T}\sinh\nu_T x - \frac{M_a}{T}\cosh\nu_T x - \frac{S_a}{T}x - \frac{M_a}{T} \tag{15}$$

$$M_{aT} = \frac{4EI}{L}S_{1T}(\theta_a - \alpha) + \frac{2EI}{L}S_{2T}(\theta_b - \alpha) \tag{16}$$

$$M_{bT} = \frac{2EI}{L}S_{2T}(\theta_a - \alpha) + \frac{4EI}{L}S_{1T}(\theta_b - \alpha) \tag{17}$$

$$S_{1T} = \frac{\rho_T(\rho_T\cosh\rho_T - \sinh\rho_T)}{4(2-2\cosh\rho_T + \rho_T\sinh\rho_T)} \qquad S_{2T} = \frac{\rho_T(\sinh\rho_T - \rho_T)}{2(2-2\cosh\rho_T + \rho_T\sinh\rho_T)} \tag{18}$$

$$\nu_T = \sqrt{T/EI} \qquad \rho_T = \nu_T L \tag{19}$$

$$S_a = \frac{M_a + M_b}{L} \qquad S_b = -S_a \tag{20}$$

軸力と節点位置座標の関係は次の様にして導く。(2)の両辺を積分して次式を得る。

$$\int\varepsilon\,dx = u_b - u_a + \delta L \tag{21}$$

$$\therefore\ T\frac{L_0}{AE} = L - L_0 + \delta L = L(1+\delta) - L_0 \tag{22}$$

$$R_a = -T = \frac{AE}{L_0}\{L(1+\delta) - L_0\}, \qquad R_b = -R_a \tag{23}$$

$$\delta = \frac{1}{L}\int \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx \tag{24}$$

δLはabの弧と弦の差を表わす。(24)に(10),(15)を代入するとδの式を得る。

$$\delta_P = C_{1P}(\theta_a+\theta_b-2\alpha)^2 + C_{2P}(\theta_a-\theta_b)^2 \tag{25}$$

$$C_{1P} = \frac{\rho_P(\sin\rho_P\cos\rho_P + \rho_P + \rho_P\cos\rho_P\sin\rho_P) - 4\sin^2\rho_P}{2\rho_P^4\sin^2\rho_P}\qquad (2S_{1P}+S_{2P})^2 \tag{26}$$

$$C_{2P} = \frac{\rho_P(\sin\rho_P\cos\rho_P + \rho_P - \rho_P\cos\rho_P - \sin\rho_P)}{2\rho_P^4\sin^2\rho_P}\qquad (2S_{1P}-2S_{2P})^2 \tag{27}$$

$$\delta_T = C_{1T}(\theta_a+\theta_b-2\alpha)^2 + C_{2T}(\theta_a-\theta_b)^2 \tag{28}$$

$$C_{1T} = \frac{\rho_T(1+\cosh\rho_T)(\rho_T+\sinh\rho_T) - 4\sinh^2\rho_T}{2\rho_T^4\sinh^2\rho_T}\qquad (2S_{1T}+S_{2T})^2 \tag{29}$$

$$C_{2T} = \frac{\rho_T(1-\cosh\rho_T)(\rho_T-\sinh\rho_T)}{2\rho_T^4\sinh^2\rho_T}\qquad (2S_{1T}-S_{2T})^2 \tag{30}$$

これらの式を見ると(23)中のR_aを求めるためには右辺にも又未知数R_aが入っていて一意的に定められない事が分る。今R_aがEuler座屈荷重より十分小とすると、三角関数，双曲線関数をTaylor展開する事により圧縮と引張の場合を包含するδの式を得る．即ち

$$\delta + \frac{L^2}{EI}\left\{\frac{(\theta_a+\theta_b-2\alpha)^2}{2800} + \frac{(\theta_a-\theta_b)^2}{720}\right\}R_a = \frac{(\theta_a+\theta_b-2\alpha)^2}{40} + \frac{(\theta_a-\theta_b)^2}{24} \tag{31}$$

(23)と(31)よりδの新しい表示式を得る。即ち

$$\delta = \frac{\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{2800}\frac{T_oL^2}{EI}\right)(\theta_a+\theta_b-2\alpha)^2 + \left(\frac{1}{24}+\frac{1}{720}\frac{T_oL^2}{EI}\right)(\theta_a-\theta_b)^2}{1-\frac{AL^3}{L_oI}\left\{\frac{(\theta_a+\theta_b-2\alpha)^2}{2800}+\frac{(\theta_a-\theta_b)^2}{720}\right\}} \tag{32}$$

$$T_o = AE(L-L_o)/L_o$$

この時S_{1P}とS_{1T}，S_{2P}とS_{2T}は同一の表示式となり次式を得る．

$$S_1 = S_{1P} = S_{1T} = 1+\frac{L^2}{30EI}R_a \qquad S_2 = S_{2P} = S_{2T} = 1-\frac{L^2}{60EI}R_a \tag{33}$$

以上よりδ，F_mの式として3とおり即ち、圧縮式，引張式，包含式を得たことになる。

4. 接線剛性マトリックス

F_mからF_θへの変換は次式によって行われる。

$$F_{xa} = R_a\cos\alpha - S_a\sin\alpha \tag{34}$$

$$F_{ya} = R_a\sin\alpha + S_a\cos\alpha \tag{35}$$

$$F_{xb} = -F_{xa} \qquad F_{yb} = -F_{ya} \tag{36}$$

$$F_{\theta a} = M_a \qquad F_{\theta b} = M_b \tag{37}$$

F_sと節点外荷重の釣合から非線形釣合方程式ができるが、これを解く場合Newton-Raphson法は一般的[5]である。Newton-Raphson法は、外荷重との釣合位置迄接線近似ですすみ収れんさせるので接線剛性マトリックスが必要である。

接線剛性マトリックスは次式となる。

$$\begin{Bmatrix} dF_{xa} \\ dF_{ya} \\ dF_{\theta a} \\ dF_{xb} \\ dF_{yb} \\ dF_{\theta b} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & -k_{11} & -k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & -k_{21} & -k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & -k_{31} & -k_{32} & k_{36} \\ -k_{11} & -k_{12} & -k_{13} & k_{11} & k_{12} & -k_{13} \\ -k_{21} & -k_{22} & -k_{23} & k_{21} & k_{22} & -k_{23} \\ k_{61} & k_{62} & k_{36} & -k_{61} & -k_{62} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX_a \\ dY_a \\ d\theta_a \\ dX_b \\ dY_b \\ d\theta_b \end{Bmatrix} \tag{38}$$

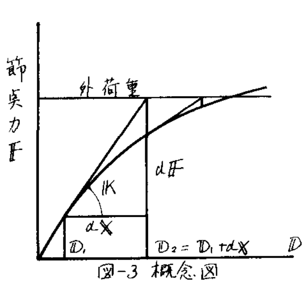

図-3 概念図

紙数の関係でk_{11}のみを示せば、次のようになる。

$$k_{11} = \frac{AE}{L}\left\{\frac{L(1+\delta)}{L_0} - \sin^2\alpha\right\} - \frac{3S_a}{L}\sin\alpha\cos\alpha - \frac{2EI}{L^2}\left(2\frac{\partial S_1}{\partial X_a} + \frac{\partial S_2}{\partial X_a}\right)(\theta_a+\theta_b-2\alpha)\sin\alpha + \frac{4EI}{L^3}(2S_1+S_2)\sin^2\alpha \tag{39}$$

圧縮式	引張式	包含式
$\delta =$ (25)	$\delta =$ (28)	$\delta =$ (32)
$S_1, S_2 =$ (13)	$S_1, S_2 =$ (18)	$S_1, S_2 =$ (33)

包含式は軸力がEuler座屈荷重より小という仮定で作られているから、吊橋等の構造物の有限変形解析には十分の精度を有するが、弾性座屈解析には向かない。しかし位置座標により一意的に節点力が求まるので、任意形状から出発する時の初期値を作るのに便利である。これら3種の関係式を組み合せる事によって、一般的構造物の有限変形解析から弾性座屈解析迄極めて汎用性の高いプログラムを作ることができる。なお軸力部材の場合は文献(5)にあげている。

5. 数値計算例

文献(4)に各種解法を数値計算で比較しているので同じ例題を包含式で計算した例を図-4、表-1に示す。図-5に弾性座屈解析を包含式+圧縮式による修正増分法[3]で計算した結果を示す。弾性座屈解析は増分のピッチを細かくすると精度が上る。

$E = 2.1 \times 10^7 (t/m^2)$　　$A = 8.55 \times 10^{-2} (m^2)$

$I = 3.64 \times 10^{-2} (m^4)$　　荷重 2～8に 45t/点

9～14に 35t/点

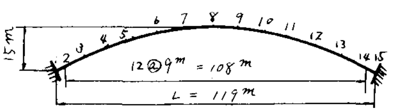

図-4

	解-1	解-2	解-3	解-4	解-7	林包含式
鉛直変位[cm]	0.21440	0.21435	0.2113	0.21113	0.21608	0.21189
曲げモーメント [t.m]	329.80	329.74	328.36	328.36	329.20	328.65
軸力 [t]	540.48	540.48	540.46	540.86	540.42	540.46

表-1　節点5の値

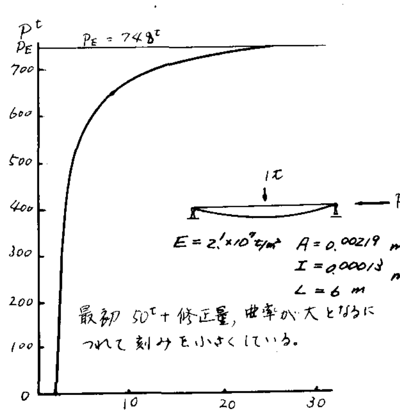

図-5

最後にこの解析は、本州四国連絡橋公団設計才1部 馬場賢三、保田雅彦、村田正信君等との討議を得、又日本電算(株)小原裕近氏によるプログラム作成によって完成した事を感謝いたします。

参考文献

(1) S. A. Saafan, "Theoretical Analisis of Suspension Bridges", ASCE, Vol. 92, No. ST4, August, 1966,

(2) Discussions by Semih S. Tezcan & Prem Krishna "Numerical Solution of Nonlinear Structures", ASCE, Vol. 94, No St6, June, 1968,

(3) 鷲津久一郎「弾性学の変分原理概論」日本鋼構造協会，培風館

(4) 堀井健一郎 他「骨組構造の大変形解析」土木学会論文報告集 才191号 1971年7月

(5) 林 有一郎, 上久保久弥「有限変形要素法によるケーブル解析」日本鋼構造協会才5回大会研究集会マトリックス構造解析法研究発表論文集 昭和46年6月