

大阪大学工学部 正員 前田幸雄

大阪大学工学部 正員 林 正

大阪大学大学院 学生員 中村 守

1. まえがき 幾何学的非線形問題の解析においては、反復法、増分法とともに、両者を併用した混合法がよく用いられる。混合法による解法は、大変形問題に対して信頼性の高い解を与えるが、各増分段階毎に反復計算を行なうため計算時間が長くなる欠点がある。そこでこれを改良するための種々の計算手法が発表されている。しかし、これら改良された増分法においても、新たな荷重増分に対する変位増分を求めるのに、前段階までに求められた変位又は、応力を用いた線形近似により、多元連立方程式を解く操作を行なっている。本文で述べる“変位推定法”とは、新たな荷重増分に対する変位増分の第1近似を、前段階までに生じた変位から、簡単な代数計算により推定するものである。

2. 基礎式 歪は、軸歪  $\epsilon_x (= \frac{\Delta x}{x} + \frac{1}{2}(\frac{\Delta x}{x})^2)$  と曲率  $(= -\frac{\Delta^2 x}{x^2})$  による軸変形の和で表わされるものとする。さらに、部材内の変位  $u$ 、ひと材端変位 ( $d$ ) の関係は、微小変形理論による変位関数で表わされるとすれば、部材の歪エネルギーが、 $d$  の関数として表わされ、全ポテンシャルエネルギーの停留条件から材端力  $F$  と  $d$  の関係が、式(1)、式(2)のように導かれる。

$$f = K(d) \cdot d = \{K_0 + K_1(d) + K_2(d)\} \cdot d \quad \text{-----(1)}$$

$$\Delta f = \{K_0 + 2K_1(d) + 3K_2(d)\} \cdot \Delta d \quad \text{-----(2)}$$

$K_0$ : 微小変形理論による剛性行列  
 $K_1, K_2$ : 変位の1次, 2次の項を含む剛性行列

3.1 変位推定法

増分法において、第  $n$  回までの増分段階が終了した状態から、次の荷重段階  $P_{n+1}$  に対する変位  $D_{n+1}$  を求める時、通常の方法では、多元連立方程式を解いて第1近似解  $D_{n+1}$  を求めている。

一方変位推定法では、新しい荷重段階  $P_{n+1}$  に対する変位を、前段階までの計算結果 ( $D_n, D_{n-1}, \dots$ ) を用いて推定し、この推定値  $\bar{D}_{n+1}$  を第1近似解とする。第2近似解および、より高次の近似解を求める時は通常の反復計算を行なう。この第1近似解は、簡単な代数計算により求まるので、多元連立方程式を解く通常の方法に比べて、計算時間は、無視できる。さらに、この方法では、全節点の各変位成分に対して、それぞれ推定計算を行なうので、近似値の精度が良く、特に荷重-変位曲線が単調な形の場合、かなり高精度の第1近似解が得られるので、以下の反復計算の回数もいちじるしく減少する。

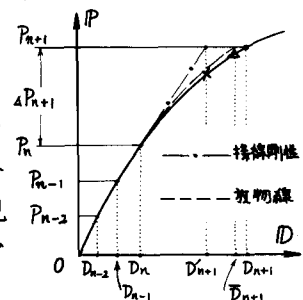


図-1 変位推定法

推定値の計算には、種々の計算式が考えられるが、最も簡単な、2次、3次の放物線による計算式を式(3)に示す。

$$\left. \begin{aligned} \text{2次式: } \Delta D_{n+1} &= \Delta P_{n+1} \left\{ \frac{\Delta D_n}{\Delta P_n} + \left( \frac{\Delta P_{n+1} + \Delta P_n}{\Delta P_n + \Delta P_{n+1}} \right) \left( \frac{\Delta D_n}{\Delta P_n} - \frac{\Delta D_{n-1}}{\Delta P_{n-1}} \right) \right\} \\ \text{3次式: } \Delta D_{n+1} &= \Delta P_{n+1} \left\{ \frac{\Delta D_n}{\Delta P_n} + \left( \frac{\Delta P_{n+1} + \Delta P_n}{\Delta P_n + \Delta P_{n+1}} \right) \left( 1 + \frac{\Delta P_{n+1} + \Delta P_n + \Delta P_{n-1}}{\Delta P_n + \Delta P_{n+1} + \Delta P_{n-2}} \right) \left( \frac{\Delta D_n}{\Delta P_n} - \frac{\Delta D_{n-1}}{\Delta P_{n-1}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\Delta P_{n+1} + \Delta P_n}{\Delta P_{n-1} + \Delta P_{n-2}} \right) \left( \frac{\Delta P_{n+1} + \Delta P_n + \Delta P_{n-1}}{\Delta P_n + \Delta P_{n+1} + \Delta P_{n-2}} \right) \left( \frac{\Delta D_{n-1}}{\Delta P_{n-1}} - \frac{\Delta D_{n-2}}{\Delta P_{n-2}} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \text{-----(3)}$$

ここに  $\Delta D_k = D_k - D_{k-1}$ ,  $\Delta P_k = P_k - P_{k-1}$ ,  $D_0 = P_0 = 0$  ( $k=1, 2, \dots, n+1$ )

3.2 計算手法

本文では、種々の解法の組み合わせにより、次のように計算手法を分類した。

解法1. 変位推定法を用いた増分法で、増分段階ごとに、Newton-Raphson法で、平衡条件を満足するまで変位を修正する。

解法1'. 解法1において、変位を推定しない。

解法2. 変位推定法を用いた増分法で、各増分段階において、変位の第1近似解を平衡条件式に代入して平衡力を算定し、これを用いて次段階の変位を推定する。

解法2'. 解法2において、変位の第1近似を、推定によらず多変連立方程式を解くことにより求める。

解法3. 荷重増分を用いずに、Newton-Raphson法のみで解く。

3.3 変形後の座標 基礎式では、変位関数および曲率に微小変形理論による式を用いているので、材端変位は、変形後の部材座標系で表わして、部材回転による剛体変位を除去しなければならない。従って、 $d$ には式(4)の値を用いる。

$$\left. \begin{aligned} u_b - u_a &\rightarrow l' - l, & v_b - v_a &\rightarrow 0 \\ \theta_a = \tan \alpha_a = \tan(\bar{\theta}_a - R), & \theta_b = \tan \alpha_b = \tan(\bar{\theta}_b - R) \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

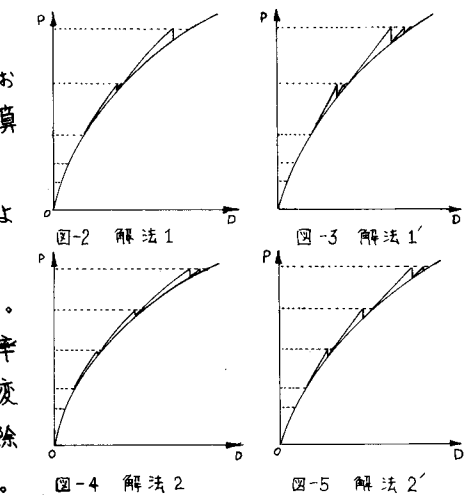
$l, l'$ : 変形前後の部材長,  $R$ : 部材回転角  
 $\bar{\theta}_a, \bar{\theta}_b$ : 節点回転角,  $\alpha_a, \alpha_b$ : 接線回転角

4. 数値計算例 (1) エラスティカ 図-6に示すエラスティカの問題を

解法1および解法2によって解き、それぞれの場合の、各荷重段階毎のNewton-Raphson法の反復回数を表-1に示す。

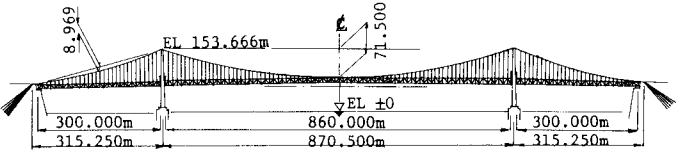
表-1

荷重段階	1~15	16~19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29-54
荷重	10~56	57~60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70~95
解法1	2~3	4~6	15	38	47	53	28	26	14	16	21	2~10
解法1'	3-4	5~7	16	43	47	46	45	44	44	43	44	—



(2) 吊橋 図-7に示す本四連絡橋(架)の吊橋を、解法2.によって解いた。荷重増分ピッチは、死、活荷重とも5, 10, 35, 50%とした。最終増分段階での反復回数は、死荷重で5回、活荷重では2回であった。

計算時間は、印刷時間を含めて、173秒であった。計算機は、大阪大学大型計算機センターのNEAC-2000-700を使用した。



5. むすび 本文で述べた変位推

定法によれば、非線形性状の強い橋造物において、荷重-変位曲線が単調な形をしている限り、増分量を等比級数的に大きくすることができる。また、座屈問題のように、荷重-変位曲線が急に曲がるような場合でも、平衡状態を定めるための修正計算の反復回数は少なくなる利点がある。

本文では、変位推定法の効果を平面骨組構造物の幾何学的非線形問題に関する数値計算によって調べたが、他の非線形問題にも適用できる。