

京都大学工学部 正員 山田善一

京都大学工学部 正員 ○渡辺英一

1 はじめに

幾何学的非線形問題の解法として、最近、荷重漸増法、Newton-Raphson 法、修正荷重漸増法などがよく研究されている。^{1), 2), 3)} そのほか、摂動法も有効な手法と考えられ、物理的な非線形問題にも Newton-Raphson 法と同様に適用できる。⁴⁾ ところで、これらの手法のうち、前者三つはどれも一次の Taylor 展開を基礎としているのに対し、摂動法は二次、もしくは二次以上の Taylor 展開を基礎とし、摂動パラメータ、すなわち増分の大きさをかなり大きくとれること、また荷重増分、変位成分の増分をパラメータとして適宜選択できることなどの利点を有する。

本論文は、幾何学的もしくは物理的な非線形問題に関して、摂動法の応用を述べ、若干の考察を加えるものである。

2 基礎的關係

いま変位を未知量とみなし、境界条件をも含めて基礎式が次の形で書けるとする。

$$K(u)u = f(p, u) \quad (1)$$

ここに u , p はそれぞれ変位ベクトル、荷重であり、 $K(u)$ は非線形性を有する演算子、 f は p , u の関数である。初期状態を添字「0」で表現し、増分をとれば次の二式を得る。

$$K_0 u_0 = f_0$$

$$\left[K_0 + \frac{\partial K}{\partial u} u_0 - \frac{\partial f}{\partial u} \right] \delta u = \frac{\partial f}{\partial p} \delta p + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial u} \delta u \delta u + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial p} \delta p \delta u + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} (\delta p)^2 - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 K}{\partial u \partial u} u_0 \delta u \delta u + O(\delta u^3, \delta p^3) \quad (2)$$

この方程式は増分に関する二次の式であるが次の摂動解

$$\delta u = u^{(1)} \varepsilon + u^{(2)} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3); \quad \delta p = p^{(1)} \varepsilon + p^{(2)} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (3)$$

をとれば式(2)の第二式は次のように層状に書け、各々の次数について線形化されている。

$$\begin{aligned} & \left[K_0 + \frac{\partial K}{\partial u} u_0 - \frac{\partial f}{\partial u} \right] (u^{(1)}, u^{(2)}) \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial p} \right] (p^{(1)}, p^{(2)}) + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial u} \right] (0, u^{(1)} u^{(1)}) + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial p} \right] (0, u^{(1)} p^{(1)}) + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \right] (0, p^{(1)2}) \\ & \quad - \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 K}{\partial u \partial u} \right] u_0 (0, u^{(1)} u^{(1)}) \end{aligned} \quad (4)$$

さて、摂動パラメータ ε として i) 荷重増分 δp , あるいは ii) 特定点の変位成分 δu_j

をとることができるが、それぞれの場合 $p^{(1)}=1, p^{(2)}=0$; $u_j^{(1)}=1, u_j^{(2)}=0$ となり既知である。ところで式(4)を構造物全体について書き表わしているものと考え、変位成分に順次番号付けを行なっているものとする。その場合、i) では式(4)のまゝの形で、また ii) では $u_j^{(1)}$ が既知量、 $p^{(1)}$ が未知量として扱われるので左辺のマトリックスの第 j 列とベクトル $[\frac{\partial f}{\partial p}]$ を入れ換えると良い。(符号を考慮して)

つぎに摂動パラメータ ε の大きさ、もしくは step の増分の大きさを決定するが、このためには、ある特定の变位成分と荷重の関係を示す曲線が等長の弧に分割できるようにすれば能率的であると思われる(たとし幾何学的な非線形を取り扱ふとき)。いま縮尺の倍率を C_s 、分割の弧長を s とすれば、次式より ε が決定できる。

$$s = \int_0^\varepsilon \sqrt{1 + \left[\frac{1}{C_s} \frac{\partial u_j}{\partial \varepsilon}\right]^2} d\varepsilon = \frac{2q\varepsilon + r}{4q} \sqrt{4q^2\varepsilon^2 + 4q r \varepsilon + r^2 + 1} + \frac{1}{4|q|} \log \left| \frac{\sqrt{4q^2\varepsilon^2 + 4q r \varepsilon + r^2 + 1} + 2|q|\varepsilon + r \operatorname{sign}(q)}{\sqrt{1+r^2} + r \operatorname{sign}(q)} \right| - \frac{r}{4q} \sqrt{1+r^2} \quad (5)$$

ここに $q = u_j^{(2)}/C_s, \quad r = u_j^{(1)}/C_s$

3 応用例

初期たわみを有する棒材の大変形解析

右図に示される棒材のつり合い式は

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \theta_e + \omega^2 \sin \theta = 0; \quad \omega^2 \equiv \frac{P}{EI} \quad (6)$$

ここに θ, θ_e はそれぞれ、総たわみ角、弾性たわみ角であり $\theta = \theta_0 + \delta\theta$; $\theta_e = \theta^{(0)} + \delta\theta$ と書ける。式(1)の形式で式(6)を書いたため

$IK = \frac{\partial^2}{\partial s^2}, \quad f = \omega^2 \sin \theta \equiv \Omega \sin \theta$ とおけば、次の摂動方程式を得る。

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \Omega_0 \cos \theta_0 \right] (\theta^{(1)}, \theta^{(2)}) = -\sin \theta_0 (\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}) + \frac{1}{2!} \Omega_0 \sin \theta_0 (0, \theta^{(1)})^2 - \cos \theta_0 (0, \theta^{(1)}) \Omega^{(1)} \quad (7)$$

数値解を得るために図-2 に示されるように差分をとる。(N 分割)

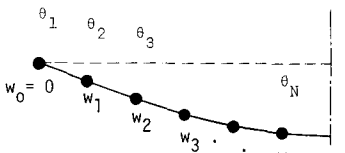


図-2 未知数 θ_i とたわみ w_i ($\theta_i = \sin^{-1} \frac{\partial w_i}{\partial s}$)

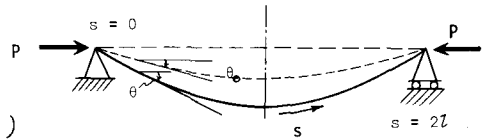


図-1 初期たわみを有する棒材

荷重 P が零のときの初期たわみ角 θ_0 は

$$\theta_0 = \frac{\pi \mu}{2} \cos \frac{\pi s}{2l} \quad (8)$$

で表わせるものとする。(そのとき $\theta^{(0)} = 0$)

図-3 は数値計算結果を示す。表-1 は計算誤差の評価を与えるものである。(2つの異なる step の大きさについて)

線形理論による座屈荷重は $(\Omega N^2)_{cr} = \frac{\pi^2}{2}$

で表わせる。したがって計算結果も、この荷重近傍で変

表-1 数値計算結果と誤差

Ω	ΩN^2	θ_1, rad	$\theta_1^{(1)}, \text{rad}$	$\theta_2^{(2)}, \text{rad}$	w_N/z	$\theta_{e,ss} + \Omega \sin \theta^*$	$(\theta_{e,ss} + \Omega \sin \theta) / \theta_{e,ss} ^{**}$
0.0000	0.000	0.0785	-----	-----	0.0500	-----	-----
0.0050	0.320	0.090	0.0102	0.0013	0.0571	0.129~0.658 x10 ⁻⁵	0.0148~0.0149
0.0097	0.620	0.104	0.0126	0.0018	0.0662	0.290~1.474 x10 ⁻⁵	0.0148~0.0149
0.0144	0.920	0.1242	0.0170	0.0028	0.0787	0.542~2.740 x10 ⁻⁵	0.0156~0.0158
0.0188	1.200	0.1507	0.0225	0.0040	0.0954	0.886~4.449 x10 ⁻⁵	0.0161~0.0163
0.0255	1.630	0.2239	0.0336	0.0060	0.1413	1.617~7.895 x10 ⁻⁵	0.0142~0.0148
0.0277	1.775	0.2674	0.0375	0.0060	0.1684	1.881~8.994 x10 ⁻⁵	0.0124~0.0131
0.0295	1.885	0.3126	0.0398	0.0054	0.1963	0.220~1.001 x10 ⁻⁴	0.0108~0.0116
0.0309	1.975	0.3610	0.0432	0.0052	0.2259	0.220~1.001 x10 ⁻⁴	0.0093~0.0102
0.0320	2.046	0.4088	0.0436	0.0042	0.2548	0.229~1.014 x10 ⁻⁴	0.0080~0.0091
0.0329	2.106	0.4567	0.0444	0.0035	0.2834	0.236~1.014 x10 ⁻⁴	0.0070~0.0081
0.0338	2.161	0.5072	0.0474	0.0031	0.3132	0.241~1.004 x10 ⁻⁴	0.0062~0.0072
0.0345	2.209	0.5556	0.0462	0.0022	0.3412	0.244~0.992 x10 ⁻⁴	0.0055~0.0065
0.0352	2.254	0.6053	0.0478	0.0018	0.3694	0.246~0.976 x10 ⁻⁴	0.0049~0.0059
0.0359	2.295	0.6532	0.0468	0.0012	0.3961	0.248~0.961 x10 ⁻⁴	0.0044~0.0054
0.0365	2.335	0.7013	0.0473	0.0008	0.4223	0.249~0.947 x10 ⁻⁴	0.0040~0.0050
0.0371	2.375	0.7502	0.0485	0.0004	0.4484	0.249~0.933 x10 ⁻⁴	0.0037~0.0046
0.0377	2.415	0.7993	0.0490	0.0001	0.4738	0.249~0.922 x10 ⁻⁴	0.0034~0.0042
0.0384	2.455	0.8480	0.0489	-0.0002	0.4984	0.249~0.913 x10 ⁻⁴	0.0032~0.0039
0.0390	2.495	0.8961	0.0484	-0.0004	0.5219	0.249~0.907 x10 ⁻⁴	0.0030~0.0036
0.0396	2.536	0.9444	0.0489	-0.0006	0.5448	0.248~0.902 x10 ⁻⁴	0.0028~0.0034
0.0403	2.579	0.9929	0.0491	-0.0007	0.5669	0.247~0.900 x10 ⁻⁴	0.0027~0.0032
0.0599	3.836	1.8662	0.0477	-0.0016	0.7982	0.203~1.202 x10 ⁻⁴	0.0009~0.0021

0.0000	0.000	0.0785	-----	-----	0.0500	-----	-----
0.0150	0.960	0.1211	0.0306	0.0119	0.0767	0.349~1.771 x10 ⁻⁴	0.1083~0.1093
0.0272	1.744	0.2166	0.0630	0.0325	0.1367	1.126~5.571 x10 ⁻⁴	0.1051~0.1083
0.0328	2.096	0.3632	0.1015	0.0451	0.2272	1.607~7.372 x10 ⁻⁴	0.0676~0.0743
0.0353	2.256	0.5165	0.1224	0.0309	0.3185	1.753~7.299 x10 ⁻⁴	0.0438~0.0518
0.0371	2.376	0.6731	0.1406	0.0160	0.4070	1.809~6.830 x10 ⁻⁴	0.0304~0.0383
0.0389	2.492	0.8306	0.1545	0.0029	0.4896	1.818~6.434 x10 ⁻⁴	0.0229~0.0294
0.0409	2.620	0.9902	0.1659	-0.0063	0.5657	1.797~6.276 x10 ⁻⁴	0.0187~0.0230
0.0432	2.764	1.1468	0.1680	-0.0114	0.6316	1.755~6.396 x10 ⁻⁴	0.0165~0.0182
0.0574	3.676	1.7742	0.1697	-0.0182	0.7909	1.358~9.445 x10 ⁻⁴	0.0065~0.0171

$\mu = 0.05$
 $N = 8$
 $s = 0.005$
 $C_s = 10$

$\mu = 0.05$
 $N = 8$
 $s = 0.015$
 $C_s = 10$

* Absolute errors.

** Relative errors.

形が急増することを示している。表-1 より次のようなことが判明する。i) 荷重増分は小さければ小さい程、良い精度を与える。ii) 荷重増分を小さくすれば、二次の項は一次の項に比較して小さくなり、Taylor展開が良い収束を示す。iii) 荷重増分はほぼ線形座屈荷重の1/4以下をとれば良好な結果を得る。iv) 荷重の増大とともに相対誤差は急速に減る。表-1には記していないがNの値を2~50まで変化させても解はあまり変化しない。図-3ではN=10の場合の結果を示しているだけであるが、他のNの値について結果をプロットしてもN=10の曲線にほぼ重なる。図-3より次のことが判明する。i) 等弧長で次のステップに進むようにすれば能率よく荷重-変形特性が描ける。ii) 急激に

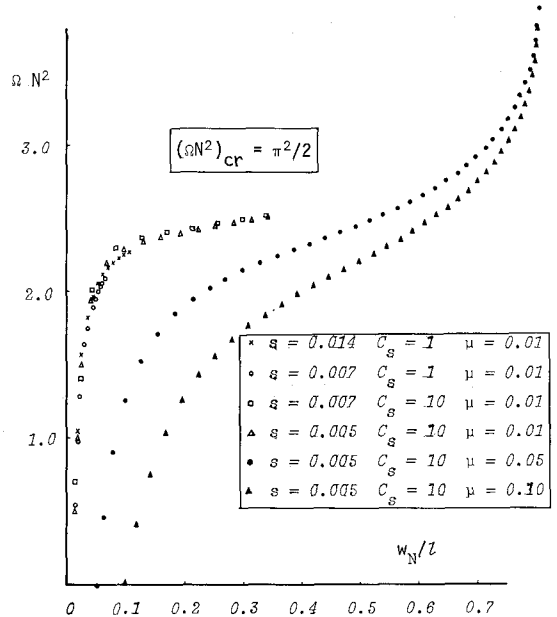


図-3 荷重たわみ曲線: N=10

解が変化するような荷重近傍ではステップの大きさによって解が若干異なる。この例では初期たわみが小さく、線形座屈荷重の近傍では弧の長さのとり方によって解が異なる。

以上、このような手法により解析を行えば、適当にstepを小さく取れば荷重の増加とともに計算誤差が蓄積するようなことはないと思われる。

腹板系の大変形解析

筆者らはプレートガーダーの耐荷力を振動論で研究してきたが、特に興味のある問題として、腹板が大変形した後のフランジ等の変形特性、耐荷特性を研究の対象としている。振動論を用いればフランジの残留応力、腹板の初期変形などはうまく処理できる。現在までは数値解を求めるために差分を用いてきたが、有限要素法を用いて解析することも試みつつある。版面の制限のために、詳細は参考文献⁴⁾にゆずるとして、二、三の計算例を図4~6に示す。

4. おわりに

棒の大変形を解析するのに要する計算時間はCPUタイムで数秒のオーダーであるが、図-4の腹板系に必要な時間は数十分のオーダーであり、相当の容量をも必要とする。板の解析においては構造がより複雑であるためか、増分のとり方にかんがりの工夫を要するようである。(不安定の解が得られやすい)

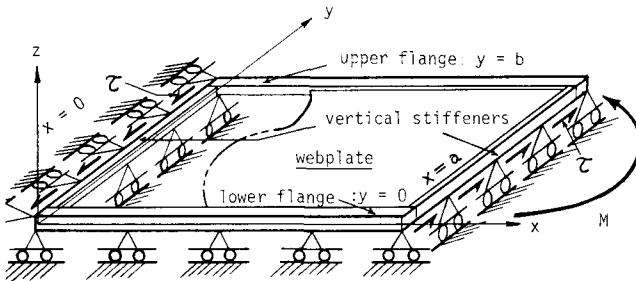


図-4 プレートガーダーの腹板系

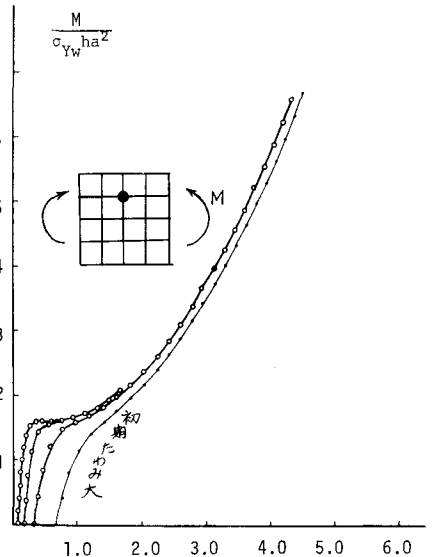


図-6 曲げを受けるパネルの腹板のたわみ初期たわみの影響

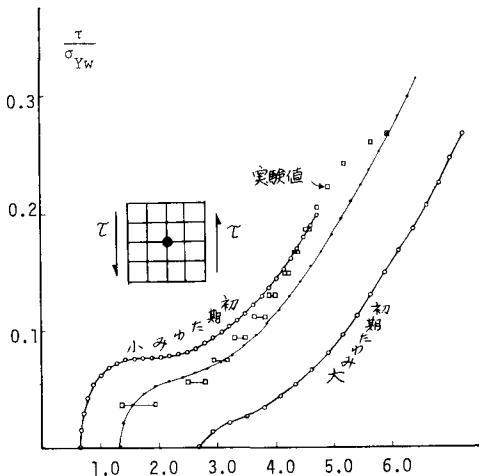


図-5 せん断を受けるパネルの中央点のたわみ

5. 参考文献

- 1) 大地羊三: 構造解析とコンピュータ 産業図書 1971.
- 2) 川股重也 他: 幾何学的非線形問題における荷重増進法の問題点 日本鋼構造協会第5回大会 マトリクス構造解析法研究発表論文 1971
- 3) 川本航乃 他: 材料非線形有限要素解析の手法について 土木学会論文報告集 No. 202, 1972
- 4) 山田善一 他: プレートガーダーの耐荷性状についての解析法 日本鋼構造協会第5回大会 マトリクス構造解析法研究発表論文 1971.