I-30 Hermite 階差法による平板（等方性，異方性）の解析

岐阜大学 工学部　正員　井上 肇

構造物の数値解析法の1つとしての階差法は，最近の電子計算機の発展に伴ない脚光をあびている有限要素法に押され，その影は薄くなりつつある。有限要素法は階差法に比べて (1)分割点を任意にとりうる (2)要素数の増加につれて正解に近づく (3)積分した形で境界条件を与えうる (4)任意の形，寸法の要素を用いることができる．等の利点が挙げられるが，階差法でもまだ利用の途はかなりあると云える。階差法はあくまで微分方程式の数学的近似であって，物理的な近似である有限要素法の上記の点には抗すべきもない。

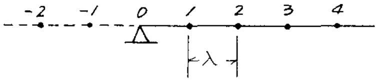
筆者は，さきに棒状構造物に対して，その微分方程式の導関数の近似度を高めた Hermite (Multi-local あるいは Mehrstellen) 階差法[1]を用い，その結果の精度がきわめて高いことを示した。[1),2)] これを，ここでは平板（等方性，直交異方性）に適用しようとするものである。この Hermite 法の平板への適用は，すでに Collatz[4)] や Zurmühl[5)] および Hausteen[6)] らによって試みられているが，何れも等方性板に対してのもので，その網目も正方形に限られている。ここでは直交異方性板を念頭におき，網目を長方形として取扱うものである。

この Hermite 階差法では，単なる高精度階差法と異なり，表現すべき導関数は1個だけでなく，複数個の導関数を関数値で表現しようとするものであって，この中に関係のある他の階の導関数を含めてもよい。この方法によれば，導関数の高い近似を数すくない関数値で与えることが出来る。通常の階差法で高い精度を要求すれば，広い範囲の多くの関数値で与えられることになり，境界附近の点で考えるとき，境界の外に導関数を表現すべき関数値を与える点が飛び出してしまう。このときこれらの値は，数学的に表現された境界条件を，やはり階差式で表現して，外点の値を消去するのが普通である。このとき，導関数を与える関数値の範囲が広ければ広いほど，飛び出す点の数が増加し通常の手段では，それを消去できなくなり，適当な仮定を用いて処理してゆかねばならない。このとき用いる境界条件式の近似度も低く，たとえ高精度で近似した導関数であっても，この境界での処理のために，全体的には，低い精度の結果しか得られなくなってしまう。これを避けるためには，網目間隔を狭くし，未知量を増加させねばならない。

Hermite 階差法では，さきにも触れたように，同時にいくつかの階数の導関数を用いることによりその境界条件をより高い近似で（全体の精度を落すことなく），与えることができるのが，オ2の特徴である。

たとえば，はりの微分方程式 $d^4y/dx^4 = q/EI$ において，その端附近においては，$O(\lambda^5)$ として

$$6\lambda^4 y_1'''' = -y_{-2} + 12y_{-1} - 39y_0 + 56y_1 - 39y_2 + 12y_3 - y_4$$



y_{-2}, y_{-1} ははりの外にあるため，境界条件 $y_0 = 0,\ y_0'' = 0$

を用いて $y_0'' = \frac{1}{\lambda^2}(y_{-1} - 2y_0 + y_1)$ $\therefore\ y_{-1} = -y_1 + O(\lambda^5)$

y_{-2} は表現できない。ここで $y_{-2} = -y_2$ と云った，大胆な仮定を入れて無理矢理 y_1'''' を表現しておく。

一方，Hermite 法では，たとえば $A_0 y_0'''' + A_1 y_1'''' + A_2 y_2'''' + B_0 y_0'' + a_0 y_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_4 = 0$

のように仮定し，y'''', y'', y を点1のまわりに Taylor 展開して，同じ導関数の係数が O であること

から $A_0 \sim a_4$ の未定係数を定めようとするものである。この際連立方程式を解く必要はあるが λ^8 程度の誤差しか入らなく，高い精度を維持し，かつ境界条件を満たす導関数の近似表現を得ることができる。これは有限要素法と比べて不利であった境界条件についての，1つの部分的な解決であろう。

直交異方性板の釣り合いの微分方程式は

$$B_x \partial^4 w/\partial x^4 + 2H\, \partial^4 w/\partial x^2 \partial y^2 + B_y \partial^4 w/\partial y^4 = q(x, y) = F$$

ここで，B_x, B_y；x, y 方向の平板剛度，$2H = B_x\nu_y + B_y\nu_x + 2(1-\sqrt{\nu_x\nu_y})\sqrt{B_xB_y}$，$\nu_x, \nu_y$：$x, y$ へのポアソン比 であるが，等方性板の微分方程式の普通の階差表現は（$B_x = B_y = H = D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$，$\nu$：ポアソン比，$t$：板厚）図−2のような表現である。正方形網目（間隔λ）として

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 & & 1 & & \\
 & 2 & -8 & 2 & \\
1 & -8 & \boxed{20} & -8 & 1 \\
 & 2 & -8 & 2 & \\
 & & 1 & & \\
\end{array} \cdot w = \lambda^4 \nabla^4 w + O(\lambda^6)$$

図−2. $\nabla^4 w$ の普通階差表現

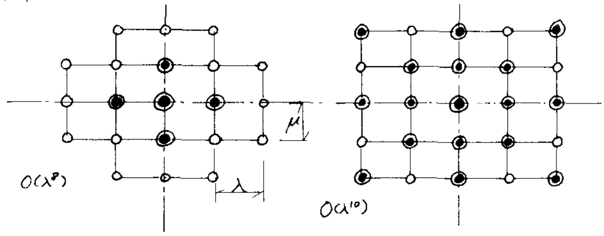
$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 & -1 & -1 & -1 & \\
-1 & 2 & 10 & 2 & -1 \\
-1 & 10 & \boxed{-36} & 10 & -1 \\
-1 & 2 & 10 & 2 & -1 \\
 & -1 & -1 & -1 & \\
\end{array} \cdot w = -\frac{\lambda^4}{2} \begin{array}{|c|c|c|}
 & 1 & \\
1 & \boxed{2} & 1 \\
 & 1 & \\
\end{array} \nabla^4 w + O(\lambda^8)$$

図−3 $\nabla^4 w$ の Hermite 階差表現

平板を，直交異方性板として扱うと，問題は多少複雑となる。上図のような対称性は失なわれてくる。

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 & & a_4 & & \\
 & a_5 & a_3 & a_5 & \\
a_2 & a_1 & \boxed{a_0} & a_1 & a_2 \\
 & a_5 & a_3 & a_5 & \\
 & & a_4 & & \\
\end{array} \; w + A_0 \nabla^4 w_0 + O(\lambda^6) = 0$$

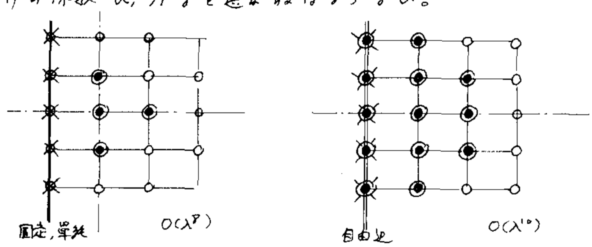
図−4 Fの階差表現（Hermite）



○；w，◉；w と F

1次元の場合と異なり，2次元以上のときには，所要の精度によって，未定係数を決定するための条件式の数が定まり，その数に対応した数だけの係数 a, A 等を選ばねばならない。

所要精度	使用できる条件式数		
	全体	1軸対称	2軸対称
$O(\lambda^6)$	15	9	6
$O(\lambda^8)$	28	16	10
$O(\lambda^{10})$	45	25	15



この数によって，w と F さらに境界条件を入れる数がきまるが同一の精度について，その点の配置，w，F 等のとり方にはいくつかの組み合わせができる。

平板の各点についての，微分方程式の階差表示をまとめて，つぎのような行列で表した式が得られる。

$A \cdot W + B \cdot Q = 0$　ここで A, B；係数行列，W, Q；平板各点のたわみ w，荷重 q のベクトル

計算値等については，講演当日にゆずる。

1) Collatz ; The Numerical Treatment of Differential Equations. 3rd ed.,(1966)
2) 井上；Hermitian 階差法による構造物の解析，第25回土木学会年次学術講演会，I．345，(1970)
3) 井上；Hermite 階差法による構造物の固有振動解析，第26回　〃　，I 377，(1971)
4) Collatz ; Das Mehrstellenverfahren bei Plattenaufgaben, Z.a.M.M.,Bd.30,S.385,(1950)
5) Zurmühl,R.; Behandlung der Plattenaufgabe nach dem verbesserten Differenzenverfahren, Z.a.M.M.,Bd.37,1957-
6) Hansteen,H.; Higher Order Difference Technique in the Theory of Cylindrical Shells,Theory of Archdams,1964