

センチュリ・リサーチ・センタ(株) 正員 竹中 裕行
 " " 武田 洋
 " " O渡部 功一

1. まえがき

有限要素法の発展およびその背景となった電子計算機の飛躍的進歩により、今まで解析不可能とされていた複雑な形状の連続体の解析が可能となり、大規模な弾性静的解析は頻繁に行われているのが現状である。一方、有限要素法の動的問題、あるいは非構造への応用なども目覚しく、その発展には限ないものがある。振動問題に代表される動的解析では、一般に固有値問題に帰結し、応答解析以前の根本的事項として、大次元行列をいかに精度良く、効率的にかつ経済的に処理するがということが大きな問題となる。現時点では、大次元行列の固有値を直接に求めるということは、経済性および高次の振動数の信頼性の低さなどから問題点がある。ここでは、大型の振動解析のために以前から提案されている縮合過程 (Guyan, Irons) の有効性およびその傾向を調べるのが目的であり、板の曲げの問題を例として、種々のモデルについて自由度の縮合を行った場合の固有振動数を計算し比較することにより、一般の応答解析に対する縮合の目安を与える。

2. 動的問題と縮合過程

線型振動問題における基本運動方程式は、マトリックス型式で次のように与えられる。

$$M\ddot{\mathbf{r}} + C\dot{\mathbf{r}} + K\mathbf{r} = \mathbf{R}(t) \quad (1)$$

ここで、 M , C , K , \mathbf{r} , \mathbf{R} はそれぞれ、質量マトリックス、減衰マトリックス、剛性マトリックス、時間に依存する変位ベクトル、時間に依存する外力ベクトルであり、 $\dot{}$ は時間に関する微分を表わす。式(1)は一般に大きなマトリックスで構成され、直接に振動解析を行うことは困難である。ここで問題となってくるのは、どのようにして減少した自由度の剛性マトリックスおよび質量マトリックスを作るかということである。

まず、変位ベクトル、 \mathbf{r} を次のように表わす。

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_M \\ \mathbf{r}_D \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで、

$$\mathbf{r} \supset \mathbf{r}_M, \mathbf{r}_M \cap \mathbf{r}_D = 0, \mathbf{r}_M \cup \mathbf{r}_D = \mathbf{r}$$

\mathbf{r}_M は動的解析に用いられる自由度であり、 \mathbf{r}_D は静的解析では用いられるが動的解析においては使用されない自由度である。同様に、剛性マトリックスも、

$$K = \begin{bmatrix} K_{MM} & K_{MD} \\ K_{DM} & K_{DD} \end{bmatrix} \quad (3)$$

と表わされる。ここで、仮想仕事の原理により、静的縮合¹⁾をほどこせば、次のようになる。

$$K_c = T^T K T \quad (4)$$

ただし、

$$T = \begin{bmatrix} T_0 \\ I \end{bmatrix}, \quad T_0 = -K_{DO}^{-1} K_{DH} \quad \text{である。} \quad (5)$$

同様に、変位ベクトル、 T_H に対する質量マトリックスを M_c とし、 M_c 、 M によってなされる仮想仕事と等しいとおくことにより次式が得られる。

$$M_c = T^T M T \quad (6)$$

K_c 、 M_c は自由度の減少した縮合剛性マトリックスおよび縮合質量マトリックスである。

ここで注意すべきことは、剛性マトリックスの縮合は、静的問題においては論理的にも正しいものであるが、動的問題では質量マトリックスの縮合は、変換マトリックス、 T と質量の分布に論理的関係はなく、単に静的縮合であるということである。

3. 固有振動数に関する数値実験とその考察

3.1 有限要素によるモデル化

解析の対称として、図-1に示すような周辺固定の正方形板を選んだ。また、質量としては、等価質量を用いた。モデル化に用いた要素は、有限要素法を用いた汎用ソフトウェア・システムであるASKA (Automatic System for Kinematic Analysis) の要素ライブラリにある、まげ剛性と有する三角形要素、“TRIB3”²⁾である。この要素は、自由度として個々の節点において、 $(w, \varphi_x, \varphi_y)$ と有し、変位場は不完全三次であり、同一平面にある他の要素とは完全に適合する。幾何学的形状および材料特性は、

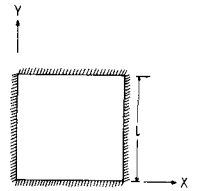
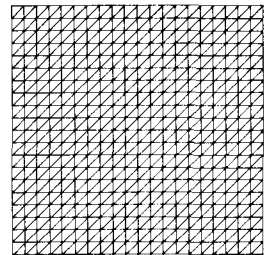


図-1

- 正方形の一辺の長さ、 l ; 200 m
- ヤング係数 ; $2.05939 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
- ポアソン比 ; 0.3
- 密度 ; $7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
- 板厚 ; 1 m



20x20 MESH MODEL

図-2

とした。また、要素分割は、 X 、 Y 両方向に等分割とし、最大20分割とした。図-2は、 (20×20) のモデルを示す。

3.2 考察

(1) 図-3は縮合されていない各モデルにおける固有振動数の解析値³⁾(Analytical)に対する相対誤差を示したものであり、要素の分割数を多くするに従って、解析値へ漸近的に近づいており、これは当然ながら静的解析の場合と一致している。 (20×20) の要素分割においては、解析値に対する相対誤差は、わずか0.3%であり、かなりの精度であるといえる。また誤差曲線は、高次の振動数ほど誤差が大きくなることを顕著に示しているが、ある程度、要素分割を多くすることにより、無視できるほどの誤差に押えることができるといえる。

(2) 図-4は代表的なモデルにおいて、たわみ w だけに縮合した場合の固有振動数と同じモデル

で縮合しなかった場合との差を相対誤差として表わしたものである。図より明かなように、たわみ成分だけに縮合しても、非常に良い結果を与えている。

(10 × 10) の要素分割をみれば、第1～3次までは、縮合されてないモデルと一致しており、第4次で、わずか0.04%の差にすぎない。以上のことより、「板の曲げ」に関する振動問題では、たわみ成分に充分な縮合を行えばよいと推定される。一般に、応答計算に際しては、作用外力の特性とも加味することにより、効率よく縮合できよう。

(3) 図-5は縮合される節点の幾何学的位置およびその数と同じにしたモデルで、要素の分割数をふやした場合と比較したものである。明らかに、要素分割数を多くしてゆけば、得られる解の精度は向上している。しかし、ここで注目すべきことは、第2次の固有振動数においては、ある程度の要素分割になると、逆に解の精度は悪くなっている。これは、2次、3次の振動数が重根であるために起る数値誤差による影響も考えられる。一方、図-5に示されるごとく、誤差曲線はすべての次数において上向きの傾向にある。これは、縮合される自由度数と縮合しない自由度数が極端な場合、縮合過程に起る数値誤差による影響と思われる。

(4) 図-6は、(20 × 20) のモデルで縮合されてないモデルと同じ自由度を有する縮合したモデルとを比較したものである。表-1は、縮合したモデルの固有振動数を表わしている。ある程度、要素分割を細かくし、幾つかの代表される節点へ縮合を行った方がよいことがわかる。

(5) 図-7は、同一モデルで縮合する節点の分布を変えた場合の固有振動数の解析値に対する相対誤差を示したものである。最大のたわみが現われる正方形板の中心へ縮合する節点を集めし行くに従って、解の精度は向上し、極端に中心に集中してしまつたモデルでは、逆にその精度は悪くなっている。これは、縮合する代表的な節点は、均等に分布させた方が良く、また解析の対称となる構造物の特性を考慮して分布させるべきであることを示している。

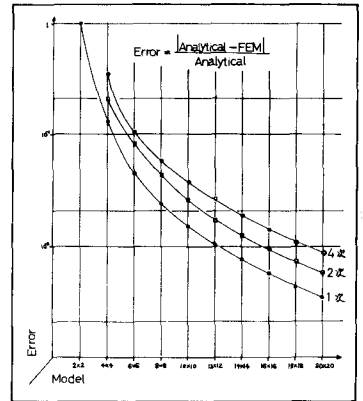


図-3

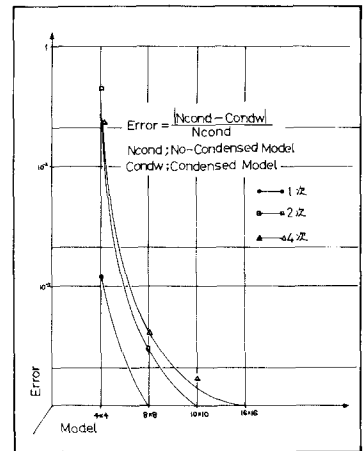


図-4

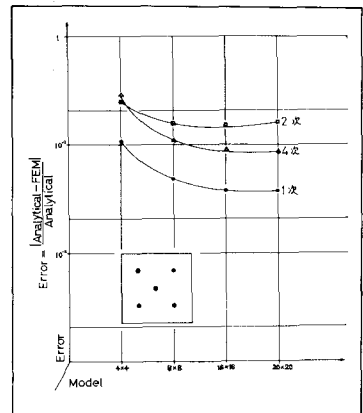


図-5

以上のことより、縮合を行う場合、その分布の仕方および自由度の採択が非常に重要になってくることが予想される。

有限要素によりモデル化された全体系より、縮合された系を作る場合、特に注意すべき点は、以下に述べるようなことであろう。

- a. 基礎となるモデルの要素分割はある程度粗かくする。
- b. 解析の対象となる構造物の動的特性を考慮して、縮合する自由度と選ぶ。
- c. 全体の自由度に比べて、動的解析に用いる自由度が極端に少なくなないようにする。

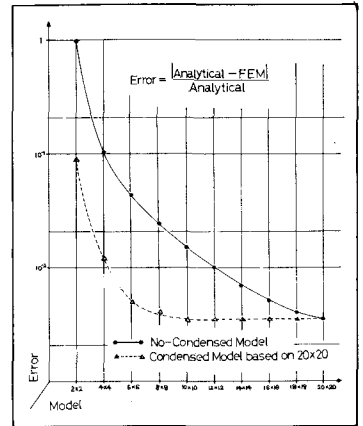


図-6

- d. 構造物全体に縮合すべき自由度を分布させる。

モード	3	27	75	147	243	363	507	675	867	20x20	Analytical
1次	1.619	1.411	1.401	1.400	1.399	1.399	1.399	1.399	1.399	1.399	1.394
2次	6.015	2.953	2.871	2.854	2.861	2.861	2.861	2.861	2.861	2.861	2.844
3次	6.091	2.956	2.873	2.867	2.864	2.863	2.863	2.863	2.863	2.863	2.844
4次	—	4.502	4.266	4.249	4.233	4.233	4.232	4.231	4.230	4.230	4.193
5次	—	5.499	5.219	5.175	5.155	5.153	5.152	5.151	5.150	5.150	5.121

ここで、b, dは、予想されるモードを表わしうようにするために必要となる条件と考えられる。

また、今回の数値実験からは省かれたが、密度の異なる材料では、縮合する節点の分布には、さらに充分な注意が必要であろう。

4. おわりに

固有振動数の計算には、ASKAを用いた。ASKAにおける固有値計算ルーチンは、Simultaneous Iteration⁴⁾を用いており、計算にあたっては、打ち切り誤差として、 10^{-6} と与えた。なお、使用した計算機は、CDC 6600であり、1語60ビット、仮数部は48ビットである。

5. 参考文献

- (1) J. S. シェムニスキー, 川井忠彦/山田嘉昭共訳 “マトリックス構造解析の基礎理論”
- (2) J. H. Argyris他3名 “A fully Compatible Plate Bending Element” 1967
- (3) 林毅 編 “軽構造の理論とその応用” 日科技連
- (4) ISD-REPORT No. 109 “DYNAN Lecture notes with computational examples” 1971

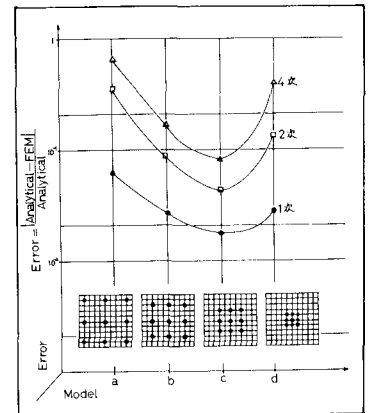


図-7