I-26 有限要素法による板振動固有値解析

京都大学工学部 正員 山田善一
京都大学大学院 学生員 ○中村公信
京都大学大学院 学生員 島田健一

§1 まえがき

現在 有限要素法において 応力法は変位法ほど一般的でない。なぜなら 変位法が 視覚的にも理解しやすい変位を一般座標にとり その適合条件に基盤を置くのに対し 応力法では力の釣合を考え しかも力は自己平衡の項と外力項の2つを組み合わせねばならない。そのため 応力場のモデル化は変位場のモデル化ほど簡単ではなく 一般座標と場のparameterとの関係は 変位法に見られるような正則行列による結合にはならない。

本論文では 板振動固有値解析における応力法の手法を説明し 解析結果の一例を厳密解や適合解非適合解と比較した図で示す。

§2 応力法による固有値解析の原理

板の自由振動の方程式は次式で表わされる。

$$\{L\}^T\{M\}=-g \tag{1}$$

ここに $\{L\}^T=\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\ 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right\}$, $\{M\}^T=\{M_x\ M_y\ M_{xy}\}$: moment amplitude , g: 慣性力の amplitude

このとき complementary kinetic energy : T^* および complementary strain energy : U^* は

$$T^*=\int\frac{1}{2\rho\omega^2}(\{L\}^T\{M\})^2dS \qquad U^*=\int\frac{1}{2}\{M\}^T[H]^{-1}\{M\}dS \tag{2}$$

ここに ω: 円振動数 ρ: 板の面密度 dS: 微小面積 D: 板剛度 ν: ポアソン比

$$[H]^{-1}=\frac{1}{D(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}1 & -\nu & 0\\ -\nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2(1+\nu)\end{bmatrix}$$: inverse Hooke matrix

微分方程式(1)の解を 一般解(自己平衡項): $\{M_\ell\}$ 特解(外力項): $\{M_e\}$ とおくと

$$\begin{aligned}\{L\}^T\{M_\ell\}=0\ &;\ \{M_\ell\}=\sum\alpha_i\{S_i\}=[S]\{\alpha\}\\ \{L\}^T\{M_e\}=-g\ &;\ \{M_e\}=\sum\beta_j\{T_j\}=[T]\{\beta\}\end{aligned} \qquad \therefore\{M\}=\{M_\ell\}+\{M_e\}=[S\,\vdots\,T]\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\end{Bmatrix}\equiv[S\,\vdots\,T]\{\gamma\} \tag{3}$$

上式中の応力関数matrix $[S]$, $[T]$ は 一般に 空間座標の関数としてモデル化される。式(3)を式(2)に代入して

$$T^*=\frac{1}{2\omega^2}\{\gamma\}^T[N]\{\gamma\} \qquad U^*=\frac{1}{2}\{\gamma\}^T[F]\{\gamma\} \tag{4}$$

ここに mobility matrix $[N]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & N_{bb}\end{bmatrix}$ $\qquad [N_{bb}]=\int\frac{1}{\rho}(\{L\}^T[T])^2dS$ (5)

flexibility matrix $[F]=\begin{bmatrix}F_{aa} & F_{ab}\\ F_{ab}^T & F_{bb}\end{bmatrix}=\int\begin{bmatrix}S^TH^{-1}S & S^TH^{-1}T\\ T^TH^{-1}S & T^TH^{-1}T\end{bmatrix}dS$ (6)

さて 式(3)によって板の応力場が定義されたので その$\{M\}$を用いて個々の有限要素内の種々の応力を表わすことができるわけであるが そのような応力のうちから適当に有限個の応力(一般には応力場の境界値): $\{g\}^e$ を選ぶことによって もとの連続分布的応力場$\{M\}$を離散的な一般化応力$\{g\}^e$によって代表させることができる。このとき$\{g\}^e$は

$$\{g\}^e=[C]\{\gamma\} \tag{7}$$

と書くことができる。$[C]$は load connection matrix といい $\{g\}^e$が指定された点の座標の値で決まる。さらに$\{g\}^e$は 自己平衡力$\{g_\ell\}^e$と外力$\{g_e\}^e$に分かれ ここでは

$$\{g_e\}^e = \{\beta\} \tag{8}$$

とおく。よって式(7)は次のように分割できる。

$$\{g\}^e = \begin{Bmatrix} g_\ell \\ g_e \end{Bmatrix}^e = \begin{bmatrix} C_a & C_b \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \tag{9}$$

一方 このような一般化応力 $\{g\}^e$ に対応して一般化変位 $\{\delta\}^e$ が存在する。それらのうちで $\{g_\ell\}^e$ と $\{\delta_\ell\}^e$ との内積は境界応力の potential Ω を形成する。すなわち

$$\Omega = -\{g_\ell\}^{eT}\{\delta_\ell\}^e \tag{10}$$

そこで 最小 complementary potential energy の原理を用いると

$$\delta(T^* - U^* - \Omega) = 0 \tag{11}$$

これに式(4),(10)を代入して式(9)を用いると

$$\delta\left(\frac{1}{2\omega^2}\{\gamma\}^T[N]\{\gamma\} - \frac{1}{2}\{\gamma\}^T[F]\{\gamma\} + \{\gamma\}^T[C_a\ C_b]^T\{\delta_\ell\}^e\right) = 0 \tag{12}$$

上式は 応力場の parameter $\{\gamma\}$ に関する変分の問題となり 次式を得る。

$$\frac{1}{\omega^2}[N]\{\gamma\} - [F]\{\gamma\} + [C_a\ C_b]^T\{\delta_\ell\}^e = \{0\} \tag{13}$$

ところが

$$\frac{1}{\omega^2}[N_{bb}]\{\beta\} = \{\delta_e\}^e \tag{14}$$

であるから

$$\{g_e\}^e = \{\beta\} = \omega^2[N_{bb}]^{-1}\{\delta_e\}^e \tag{15}$$

上式の構造より考えて $[N_{bb}]^{-1}$ は要素の mass matrix に相当する。すなわち

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ g_e \end{Bmatrix}^e = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_{bb}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_\ell \\ \delta_e \end{Bmatrix}^e \equiv \omega^2[M]^e\{\delta\}^e \tag{16}$$

式(13)に式(14)を代入して

$$[C]^T\{\delta\}^e - [F]\{\gamma\} = \{0\} \tag{17}$$

式(7)(17)より $\{\gamma\}$ を消去して

$$\{g\}^e = [C][F]^{-1}[C]^T\{\delta\}^e \tag{18}$$

上式の構造より考えて $[C][F]^{-1}[C]^T$ は要素の stiffness matrix に相当する。すなわち

$$\{g\}^e = [C][F]^{-1}[C]^T\{\delta\}^e \equiv [K]^e\{\delta\}^e \tag{19}$$

よって 要素の釣合方程式は

$$\{g\}^e = \begin{Bmatrix} g_\ell \\ 0 \end{Bmatrix}^e + \begin{Bmatrix} 0 \\ g_e \end{Bmatrix}^e \tag{20}$$

これに式(16)(19)を代入して

$$[K]^e\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} g_\ell \\ 0 \end{Bmatrix}^e + \omega^2[M]^e\{\delta\}^e \tag{21}$$

系全体の釣合を考えると 上式右辺第1項の総和は自己平衡力の総和であるから 0 となり

$$\sum_e [K]^e\{\delta\}^e = \omega^2 \sum_e [M]^e\{\delta\}^e \tag{22}$$

ところで もしこの合成を

$$\begin{bmatrix} K_{\ell\ell} & K_{\ell e} \\ K_{\ell e}^T & K_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_\ell \\ \delta_e \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_\ell \\ \delta_e \end{Bmatrix} \tag{23}$$

というように区別して行えば 結局 式(22)の形の固有値問題は

$$([K_{ee}] - [K_{\ell e}]^T[K_{\ell\ell}]^{-1}[K_{\ell e}])\{\delta_e\} = \omega^2[M_{ee}]\{\delta_e\} \tag{24}$$

という形に縮小できる。

§3 応力法・平衡三角形要素モデル(EQT)

Fig.1に示すような三角形012を考える。この斜交座標系$(x,y;\angle xoy=\alpha)$における応力componentはFig.2に示すような配置をとる。そこで この三角形要素の応力場を 式(3)にしたがって次のような線形モデルで仮定する。

$$\{M_e\}=\left\{\begin{matrix}M_x\\M_y\\M_{xy}\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\alpha_1+\alpha_2\xi+\alpha_3\eta\\\alpha_4+\alpha_5\xi+\alpha_6\eta\\\alpha_7+\alpha_8\xi+\alpha_9\eta\end{matrix}\right\}=\begin{bmatrix}1&\xi&\eta&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&\xi&\eta&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&\xi&\eta\end{bmatrix}\left\{\begin{matrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_9\end{matrix}\right\}\equiv[S]\{\alpha\} \qquad (25)$$

$$q=(\beta_1+\beta_2\xi+\beta_3\eta)\sin\alpha \qquad ここに\ \xi=\frac{x}{a}\quad \eta=\frac{y}{b} \qquad (26)$$

これにより 自己平衡力および慣性力の連続分布が保証される。

また式(3)(26)より考えて $\{M_e\}$はξ,ηの高々3次式であることがわかるが その合計30個の未定係数は境界条件「要素の辺上で bending moment: $M_n=0$, 剪断力: $Q=\text{const.}$」によって 次のように決定される。

$$\{M_e\}=\left\{\begin{matrix}M_x\\M_y\\M_{xy}\end{matrix}\right\}=\frac{\sin\alpha}{6}\begin{bmatrix}a^2(\xi-\xi^2)&\frac{a^2}{2}(\xi^2-\xi^3)&\frac{a^2}{2}(\xi-\xi^2-\xi^2\eta)\\b^2(\eta-\eta^2)&\frac{b^2}{2}(\eta-\eta^2-\xi\eta^2)&\frac{b^2}{2}(\eta^2-\eta^3)\\-ab\xi\eta&-\frac{ab}{2}\xi^2\eta&-\frac{ab}{2}\xi\eta^2\end{bmatrix}\left\{\begin{matrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{matrix}\right\}\equiv[T]\{\beta\} \qquad (27)$$

次に 一般化応力$\{g\}^e$として 次の15個の量を選ぶ。(Fig3参照)

$\{g_e\}^e$: $g_1\sim g_3$: 辺の両端のtwisting momentにより節点に生じるcorner load
$g_4\sim g_6$: 1つの辺についてのKirchhoff shear loadの和
$g_7\sim g_{12}$: 辺の両端のbending moment

$\{g_e\}^e$: $g_{13}=\beta_1\quad g_{14}=\beta_2\quad g_{15}=\beta_3$ (28)

$\{g\}^e$に対応した一般化変位$\{\delta\}^e$は 両者の積がエネルギーの元を持つように定められる。たとえば Fig3のM_{01},M_{10}に対応した一般化変位を$\varphi_{01},\varphi_{10}$とすれば 辺01上のbending moment: $\varphi_{n,01}$が線形であることを利用して 次式で与えられる。

$$\varphi_{01}=\int_{\overline{01}}\varphi_{n,01}\left(1-\frac{s}{a}\right)ds \qquad \varphi_{10}=\int_{\overline{01}}\varphi_{n,01}\frac{s}{a}\,ds \qquad (29)$$

以下 §2の手順にしたがって $[N],[F],[C],[M]^e,[K]^e$をもとめれば 式(24)より固有値が計算できる。

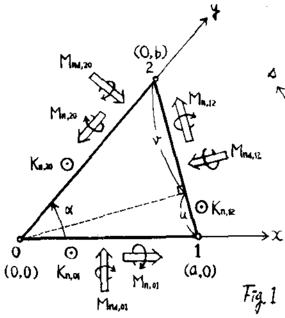


Fig.1

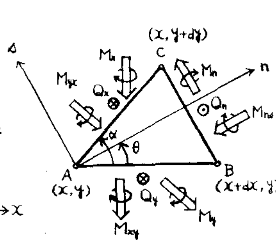


Fig. 2

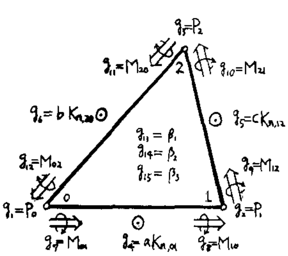


Fig. 3

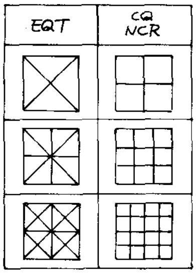


Fig.4

§4 数値解析

厚さ一定 一辺ℓの均質な正方形板を Fig4に示すようなmeshに分割して解析を行なう。ポアソン比は$\nu=0.3$とし 固有値はすべて次のような無次元量λで表わす。

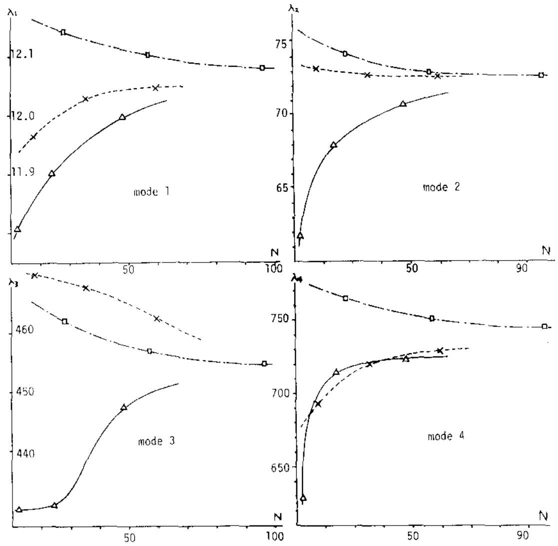
$$\lambda=\rho\omega^2\ell^4/D \qquad (30)$$

計算結果の一例を Fig.5,6,7に示す。比較のため 適合四辺形要素モデル(CQ), 非適合長方形要素(NCR)の解 あるいは厳密解を併記する。図中の横軸Nは自由度を表わす。

§5 考察・あとがき

i) 固有値解析においては 一般に 変位法の解が上から正解に近づくのに対し 今回用いたこの応力法では下から近づく。そこでもし 前者の単調減少性，後者の単調増加性が完全に保証されていれば両者がそれぞれ解の上界および下界を与えるので 正解の存在範囲を不等式で表現することができる。CQについてはそれが成り立つが NCRではその保証はない。EQTについても保証はないが 今回種々の拘束条件に対して行なった数十組の計算結果に関する限りでは 単調増加性が成り立つと言っても大過はない。

ii) EQTでは式(29)の構造より考えて たわみ角に関する拘束条件を課すことがむつかしい。変位法とちがってEQTの一般化変位は たわみとくとが辺や面に関する重みつき平均として定義されるので その場合 節点単独の変位は表わしえない。



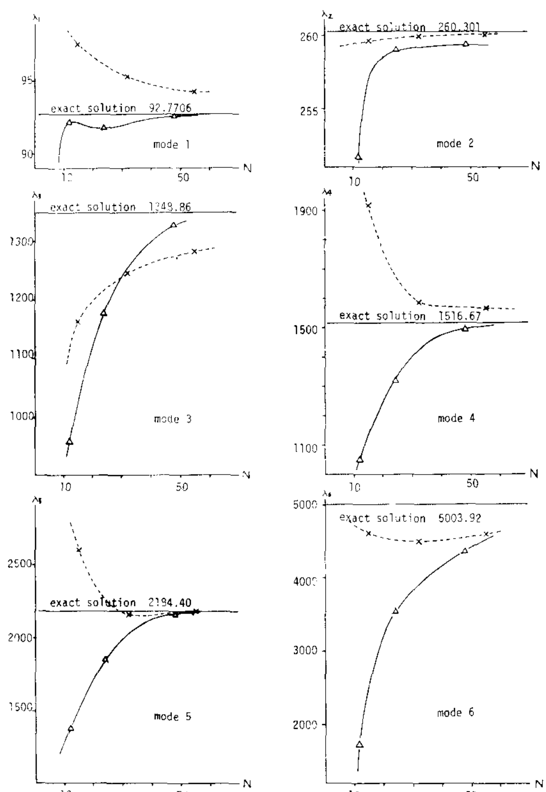
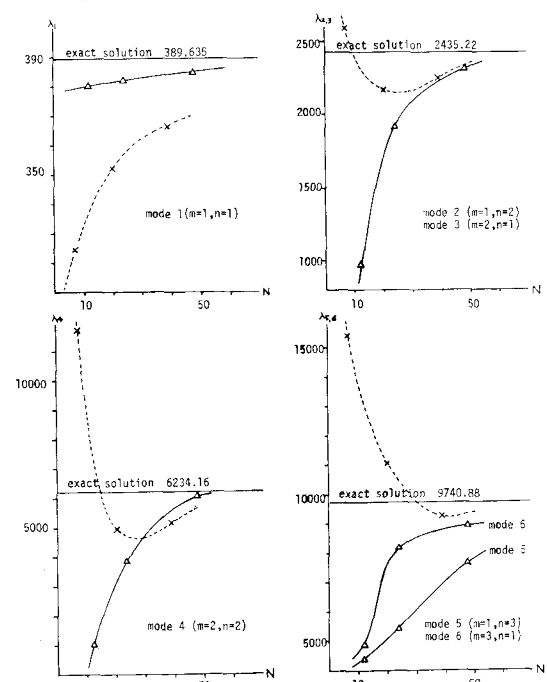


Fig.5 (上図)：片持ち板
Fig.6 (左図)：対辺単純支持・対辺自由板
Fig.7 (下図)：周辺単純支持板

(ただし EQT ─△─ NCR ---×--- CQ ─·─□─·─)



References

- M. Geradin; Computational Efficiency of Equilibrium Models in Eigenvalue Analysis. Presented to the Colloquium IUTAM held in Liege, Belgium, august 23-28, 1970
- B. Fraeijs de Veubeke; Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method. Stress Analysis, edited by O.C. Zienkiewicz, Chapter 9, Wiley, 1965