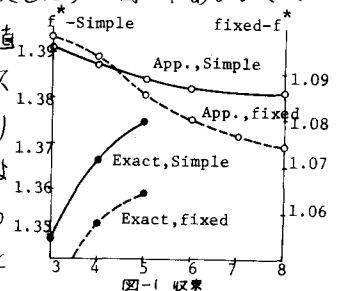


建設省土木研究所 正員 川島一彦
 名古屋大学 正員 成岡昌夫

1. 要旨 C. Brebbia-J. Connor³⁾は、平板および殻のたわみ曲げ解析を行なうため、Newton-Raphson法、荷重漸増法を用いた解析法を示しているが、幾何学的剛性行列を求める際に、ひずみ-変位関係式で回転の2乗の項を考慮に入れたことに由来する非線形な行列を面積分する必要が生じてくる。この非線形行列を数値的に面積分するためには、数値計算を実行する際に、非常に多くの計算時間と計算機の容量を必要とするので、ここでは、回転と面内力を要素内で一定と仮定した時の近似的な解を求め、正確に数値積分計算した場合との比較と簡単な形状の板について他の解法による結果との検討を行なった。つぎに、Udo Vogelは周辺単純支持直交異方性板が等分布荷重を受ける場合を解くために板中央に座標軸の原点をとり、たわみを $w(x,y) = f \cos(\pi x/A) \cos(\pi y/B)$ (A, B : x 軸, y 軸方向の辺の長さ) のように仮定して、エネルギー法を用いて未定係数 f の決定方程式を求めた。一方、川井一大坪は、Marguene-Treffitz理論を拡張して、有限要素法とRayleigh-Ritz法を組み合わせた方法を提案しているが、このうちの曲げ変位関数を初項のみで仮定した第1近似解の決定方程式がUdo Vogelの f の決定方程式と同一の形となるので、この関係を調べ、さらに、川井一大坪の第1近似解を用いてUdo Vogelが求めたと同様の f の決定方程式を周辺固定など、他の境界条件の場合について求めた。

2. 数値計算例 C. Brebbia-J. Connorの方法で、回転と面内力を要素内で一定と仮定する場合、これを要素内のどの位置の値で代表させるかが問題となるが、実際にこれらの値の要素内の分布を求めると、面内力は要素周辺では隣接要素どうしの値から判断して精度が悪くなっているようであったので、要素中央点の値を用いることにした。非線形行列を正確に数値積分した場合と、このように近似的に求めた場合を4辺固定および単純支持の正方形板が等分布荷重 q を受ける場合の板中央点のたわみ f について比較したのが図1である。図中では、無次元化して、 $f^* = f/R$, $q^* = q/E \cdot (3/2R)^2$ で表わしてある。この図から、分割数を増加させるとともに、非線形剛性行列を正確に数値積分すると下から、近似的に求めた場合には上からと収束する方向が違ってくるが、どちらも一様に収束しており、板の曲げ解析をする限りでは近似的に非線形行列を求めてもよいと考えられる。

このように、要素内で回転と面内力が一定と仮定した場合の剛性行列を用いて、板周辺における面内変位の拘束がないように単純支持された正方形板が等分布荷重を受ける場合を、板中央点の変位について、Udo Vogel解、川井一大坪の第1近似解、Kaiserの実験結果²⁾と比較したのが図2である。ここで、有限要素解は板の長を 8×8 分割し、荷重漸増法で得られた値を初期値として、Newton-Raphson法により所要の精度まで解を収束させてから次のステップに移るといった修正荷重漸増法によった。収束条件は変位のユークリッド・ノルムの相対誤差が0.5%以下とした。図3は板中央点の曲げおよび面内応力を示したものである。曲げ応力は荷重が増加するにつれ、Udo Vogel解、川井一大坪の第1近似解は有限要素解およびKaiserの実験結果と



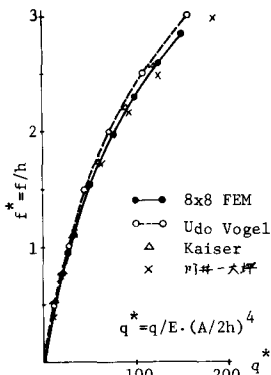


図2. 荷重-板中央たわみ

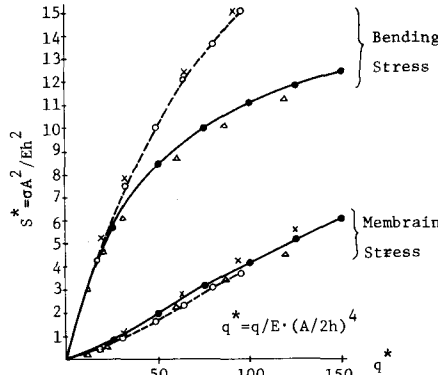


図3. 荷重-板中央の曲げ, および, 面内応力

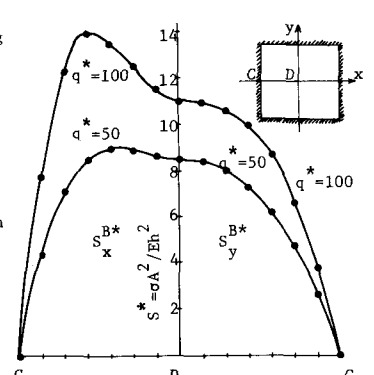


図4. 板中央線(C-D)に沿う曲げ応力分布

離れてくるのが認められるが、これは Udo Vogel 解、川井一大坪の第1近似解がたわみを1項のみの三角関数で仮定しているため、たわみの増加に伴う剛性の増大によるたわみの再配分効果を表わし得ないためであると考えられる。したがって、これらの方法はたわみの形状が微小変形の範囲内で求められたたわみと相似とみなすことができる範囲内の荷重に限定されよう。図4は板中央線に沿う板内部の曲げ応力の分布を2種類の荷重段階について示したものであるが、たわみを考慮すると、曲率の最大となる位置が荷重の増加にしたがって板中央点から周辺部へとずれてくるのが認められる。

3. Udo Vogel 解と川井一大坪の第1近似解の比較

Udo Vogel が誘った未定係数 f^* の決定方程式は、上述の等方性正方形板の場合はつぎのようになる。

$$0.21 f^{*3} + 1.37 f^* - 8^* = 0 \quad (1)$$

一方、川井一大坪の第1近似解(板の1/4を7x7分割)を求めるとつぎのようになる。

$$0.28 f^{*3} + 1.38 f^* - 8^* = 0 \quad (2)$$

すなわち、同一の変位仮定から出発して、Udo Vogel がエネルギー法を用いるながら微分方程式を解いて求めた解と、川井一大坪が *Maquene-Treffly* 理論を拡張して求めた方法のうちの第1近似解とは、式(1)(2)に示されるように、ほとんど同じ結果を与えている。また、Kaiser の実験結果も式(1)、(2)のような形の形で表わされると仮定して、係数を最小自乗法で求めると、 $0.22 f^{*3} + 1.45 f^* - 8^* = 0$ となり、ほぼ、式(1)、(2)と近い形となった。

以上は板周辺における面内変位の拘束のない場合であるが、板周辺で法線方向の面内変位を拘束した場合を式(2)と同様に求めると、 $1.81 f^{*3} + 1.38 f^* - 8^* = 0$ となり、式(2)に比べて非線形の影響を表わす f^* の3次の係数が大きくなり、それだけ周辺の面内変位を拘束することにより、非線形性が早く、かつ、大きく現われてくるのがわかる。

周辺固定の場合には、 $147.3 f^{*3} + 17.84 f^* - 8^* = 0$ ($w(x,y) = f \{ 1 + \cos(2\pi x/A) \} \{ 1 + \cos(2\pi y/B) \}$ と仮定) に対する2辺固定、他の2辺単純支持(周辺の法線方向変位は拘束)の場合には、 $16.02 f^{*3} + 5.90 f^* - 8^* = 0$ ($w(x,y) = f \cos(\pi x/A) \cdot \{ 1 + \cos(2\pi y/B) \}$ と仮定) となる。

References

- 1) Vogel, U.: Der Biege- und Membranspannungszustand der rechteckigen orthotropen Platte mit großer Durchbiegung unter gleichmäßig verteilter Vollast bei Navierschen Randbedingungen, näherungsweise behandelt mit Hilfe der Energie-Methode, von der Technischen Hochschule Stuttgart zur Ergänzung der Würde eines Doktor-Ingenieurs genehmigte Abhandlung, Juli., 1961.
- 2) Kaiser, R.: Rechnerischen und experimentelle Ermittlung der Durchbiegungen und Spannungen von quadratischen Platten bei freier Auflagerung an den Rändern, gleichmäßig verteilter Last und großen Ausbiegungen, ZAMM, 16(1936), pp.73-98.
- 3) Brebbia, C. and Connor, J.: Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis, Proc. ASCE, 95(1969), EM-2, pp.463-483.
- 4) 川井, 大坪: 平板の幾何学的非線形問題の解法(1), 日本造船学会論文集, 126(1969), pp.235-244.